2017年中国研究生数学建模竞赛B题（华为公司命题）

面向下一代光通信的VCSEL激光器仿真模型

友情提示：阅读本题附录3有助于理解本题的相关概念与方法。

随着互联网技术的快速发展，家庭固定网络速度从原来的2Mbps、10Mbps，快速发展到了今天的百兆（100Mbps），甚至千兆（1000Mbps）光纤宽带入户。“光纤宽带入户”，顾名思义，就是采用光纤来传输信号。光纤中传输的激光信号具有远高于电信号传输速率的特点(激光信号传输带宽远大于电信号传输带宽)，更适合于未来高速率的传输网络。工程师们在光纤通信传输系统设计前，往往会通过计算机仿真的方式研究系统设计的指标，以便快速找到最适合的解决方案。因此在进行系统仿真时，需要准确掌握系统中各个器件的特性以保证仿真模型的精度。激光器作为光纤通信系统的核心器件是系统仿真中需要考虑的一个重要因素。

与我们生活息息相关的激光器种类繁多，其中的垂直腔面发射激光器（VCSEL: Vertical Cavity Surface Emitting Laser）具有使用简单，功耗较低等特点，一般VCSEL的工作电流在6mA~8mA。本题的主要任务，就是得到能准确反映VCSEL激光器特性的数学模型。

激光器输出的光功率强度与器件的温度相关，当器件温度（受激光器自身发热和环境温度的共同影响）改变后，激光器输出的光功率强度也会相应发生变化。在进行建模时，我们既要准确反映VCSEL激光器特性，还要考虑：

1. 激光器输出的功率强度与温度的关系——即该激光器可以在多大的外界环境温度范围内使用；
2. 如何设计激光器参数可以使激光器具有更大的传输带宽（即S21曲线上纵坐标-10dB位置对应的横坐标频率值更大）——即可以实现更快的传输速率。
3. 问题1：VCSEL的L-I模型

L-I模型，即激光器的工作电流与输出光功率强度关系模型（L：light，表示光功率强度，也可以表示为P；I：Intensity of current，表示工作电流）。激光器是将电能转换成光能的半导体器件，能量转换的过程，也是电子的电能转换为光子的光能的过程，在转换过程中，伴随着电子的运动，半导体器件会产生一定的热量。从能量守恒的角度看，转化为热能的能量越多（发热导致能量浪费了），器件温度越高，那么转化为光能的能量越少（输出光功率越低），可以利用的能量就越少。

国际上很多研究机构对VCSEL的L-I建模问题做了大量研究，目前有一个L-I经验公式获得了大多数人的认可。附录1给出了该公式及其一种参数化表达，请你们根据附件提供的文件名为“L-I-20C.mat”的L-I实测数据（数据在室温20℃下采集**，**载入matlab后将获得4个变量：P:光功率，I:实测驱动电流，U：实测电压，Ta：实测温度）和附录1中的表1给出的一组经验值，完成如下工作：

* 1. 确定模型参数，根据模型画出10℃，20℃，30℃，……，90℃等温度下的L-I曲线（横坐标是电流强度，纵坐标是光功率）。
  2. 假定当电信机房里VCSEL激光器在直流输入时输出的平均光功率低于2mW时，用户的光猫无法检测到信号。那么，根据建立的L-I模型推测：电信机房里VCSEL激光器工作的环境温度最多不能高于多少摄氏度，才能保证用户可以正常使用网络？

1. 问题2：L-I模型的改进

分析问题1中模型的精度和误差产生的原因，提出你们的改进，根据改进模型画出10℃，20℃，30℃，……，90℃等温度下的L-I曲线，并与问题1中L-I曲线进行比较。你们也可以采用完全不同的方法得到更好的L-I模型。

1. 问题3：VCSEL的带宽模型（小信号响应模型）

VCSEL的传输带宽越宽，用户上网的网速也就越快。为了适应未来的高速传输网络需求，期望设计出具有更宽带宽的激光器。带宽模型，通常也称为小信号响应模型，就是给器件输入不同频率的幅度非常小的信号（注意与L-I模型不同，这里幅度小，而且含多个频率，对应S21曲线横坐标是频率，纵坐标是光功率幅度），获得对应频率点输出信号的幅度（功率）；这里“不同频率”是从0频到指定频率按一定步长进行扫描，例如从0开始以0.5GHz为步长，扫描到30GHz。在无线通信中，器件带宽通常采用幅度3dB衰减位置的信号带宽来衡量——即3dB带宽。在光纤通信中，由于系统可用幅度衰减范围更大，通常采用幅度10dB衰减位置的信号带宽进行衡量——10dB带宽。附件中名为“S21\_5.mat”的文件给出了一组VCSEL激光器小信号幅频响应曲线数据和相应的驱动电流、输出光功率数据，将数据载入MATLAB将获得4个变量：I\_b=7.5，表示偏置电流为7.5mA；Ta=20表示测试的环境温度是20℃；f表示S21曲线的频率，单位为Hz；S21表示S21曲线的幅度，单位为dB，请你们：

1. 建立恰当的激光器小信号幅频响应参数模型，给出参数构成及其确定方法，画出不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线（即S21曲线），其中一条必须是20℃下7.5mA偏置电流的仿真输出曲线。
2. 利用你们的带宽模型，分析激光器的温度和激光器的偏置电流对器件带宽曲线的影响。
3. 假定激光器工作环境温度可以采用某些措施让它固定在20℃（例如，通信设备商通常的做法是将激光器放到精密的恒温箱中进行测试。若将激光器放在室内环境测试，随着测试时间的变成，激光器本身会发热导致激光器表面及其周边环境温度升高，而恒温箱则可以保证其表面和周边环境温度恒定不变），偏置电流固定在7.5mA，那么，如果要获得更宽带宽的激光器设计方案，还可以通过什么手段实现？
4. 改变激光器的某些参数可以发现一些有趣的问题，比如激光器在3dB范围内的部分频率处幅度可能会高于0频位置。请问，改变哪些参数会有这种现象？在实际应用中，我们希望这部分带宽曲线越平坦越好，那么如何设计这些参数可以实现我们的目的？

附录2给出了一种基于速率方程的建模方法，你们可以在确认其推导正确的基础上提出参数估计方法并根据题目提供的数据确定合适的参数以完善模型。你们还可以对推导过程进行完善或者改进，以得到更为精确的模型。



1. 某激光器S21曲线

对于S21曲线的一些基本说明：假定图1是实验室在不同条件下（不同测试环境温度，不同偏置电流）测试到某型号激光器的三条S21曲线（幅频响应曲线）。图中横坐标为频率，纵坐标为不同频率对应的幅度，-10dB幅度位置的虚线表示所关注的对应的频率大小（带宽）。从图中可以看到，①号曲线对应的横坐标频率（带宽）约13GHz，②号曲线对应的横坐标频率（带宽）约22GHz，③号曲线对应的横坐标频率（带宽）大于25GHz。即三条S21曲线中，③号曲线的-10dB带宽最大。

1. 问题4：VCSEL带宽模型的改进

开放性探索问题：是否有更好的带宽模型建模方式，使得模型运算速度更快？或者在相同的温度和偏置电流下，可以获得更宽的3dB（或10dB）带宽?

如果有，请给出建模方案，包括可能的数学公式，不同温度和偏置电流下的带宽响应曲线，并与问题3的模型进行比较。

1. 附录1：激光器L-I模型

一般认为，VCSEL的各参数间满足如下规律：

 （1）

其中：

 ：激光器输出的光功率，在L-I中光功率也用L来表示，即L-I也可以写成P-I

 ：注入到激光器的外部驱动电流，包含外部加载的偏置电流*Ib*和信号电流，在无信号时为偏置电流*Ib*

 ：L-I曲线的斜率，从能量转换角度看，斜率对应于转换效率(L-I曲线横坐标是电流I，纵坐标是出光功率P，斜率越高，相同电流I对应的输出光功率越高，相同电能转换为的光能越多，即转换效率越高)；与温度相关

 ：阈值电流；激光器电流超过该值则激光发光；与载流子数和温度相关

 ：载流子数

假设：

1. 转换效率受温度影响较小，即近似于常数 ；

2. 

其中为常数，是与温度相关的经验热偏置电流（即激光器内部的偏置电流，随激光器温度的变化而变化，有别于外部人为加载的激光器偏置电流*Ib*）。

这样（1）式可以简化为

 （2）

将表示为：

 （3）

式中的温度受外界环境温度和自身的温度影响，自身的温度与器件产生的瞬时功率相关，即受V-I特性（电压-电流特性）影响：

 （5）

 ：VCSEL热阻抗

 ：热时间常数

 ：环境温度

 ：偏置电流*Ib* （输入电流）

 ：输入电压

式（2）-（5）就是VCSEL的一种经验模型，其中的参数需要根据实验数据确定，表1给出的仅是一组（并非最佳）参考初值：

1. L-I模型初值设置即模型参数提取

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 参数 | 参考初值 | 单位 |
|  | 0.5 | - |
|  | 0.3E-3 | A |
|  | 2.6E3 | ℃/W |
|  | 1.246E-3 | A |
|  | -2.545E-5 | A/K |
|  | 2.908E-7 | A/K2 |
|  | -2.531E-10 | A/K3 |
|  | 1.022E-12 | A/K4 |

1. 附录2：基于速率方程的带宽模型推导

将偏置电流和注入激光器的外部驱动电流代入激光器速率方程，得到：

 （6）

VCSEL输出的光功率与光子数成正比，假定比例因子为

 （7）

VCSEL的小信号响应建模的思路为：

**：载流子数

**： 时间

：注入效率；或转换效率；

：物理常量，电子电量，1.6×10-19库伦

：透明载流子数，当载流子数*N*大于透明载流子数的时候，激光器有源区发生粒子束反转，满足产生激光的其中一个条件

I：注入的外部驱动电流；

*Ioff*(*T*)：与温度相关的偏置电流

 ：载流子复合寿命

 ：光子寿命（p: Photon, 光子）

 ：增益系数，激光产生的阈值条件，增益大于总损耗；

 ：光子数

 ：受激辐射耦合系数

 ：增益压缩因子

1. 求出稳态下的电流、载流子数、光子数；稳态，即无驱动信号情况下，激光器中的电流为直流信号，此时电流是稳定的，载流子数、光子数也都是稳定的；

2. 加载小信号（小信号为信号幅度非常小的信号，不同频率处的信号幅度不同，因此小信号是与频率相关的小幅度信号），可以假定小信号引入了与频率相关的电流、载流子数、光子数，数学表达可以写成： ， ，

3. 给VCSEL加载上小信号后，原来速率方程中的电流、载流子数、光子数则表示为稳态下的值与小信号下引入信号变化的值的和。

 （8）

其中， ， ，足够小。

可以根据前面所有材料提到的数学表达式（主要为等式和等式）推导出VCSEL的小信号响应模型数学表达式。

【下面是小信号响应数学表达式推导的过程】

当外部驱动电流保持恒定，载流子数N与光子数S将在一段时间的瞬态后达到稳定状态，此时N和S对时间求导为0（稳态下，载流子和光子数变化为0），那么等式可以写为

 （9）

 （10）

现在研究在已知输出光功率情况下激光器中载流子的浓度问题。 将 关系式带入等式，此时求出的N为稳态下载流子浓度，记为 ，等式中的第二个等式得到

 （11）

其中， 为通过仪器测量到的激光器的实测出光功率， 为参数。根据实测光功率和参数值，从等式可以计算出激光器中载流子浓度 。

根据计算出来的载流子浓度可以进一步计算激光器中用于转换成光能的激光器驱动电流 和激光器中稳态下理论上可计算处的光子数 。

将和等式计算出的载流子浓度 带入等式中，求出的电流 即为根据速率方程从理论上所计算出的激光器发光的驱动电流

 （12）

根据计算出的稳态下载流子浓度，从等式可以计算稳态下理论上的光子数

 （13）

在通常的VCSEL激光器中，，根据等式得到理论计算出的激光器稳态工作时的光子数

 （14）

值得考虑的问题是：此处如果不做简化，是否可以得到更准确的计算结果？

根据前面介绍知道，激光器输出光功率与光子数成正比，比例因子为 ，那么根据理论计算出的光子数 可以计算出理论上的出光功率

 （15）

至此，我们已经计算出了激光器理论的出光功率和理论上的驱动电流的值 ，而通过仪器可以测量出激光器的出光功率，驱动电流，电压为 。

重新梳理一次上述信息，根据实测激光器光功率值和参数，我们可以计算出载流子浓度 ；将计算出的载流子浓度带入等式，可以得到理论上的驱动电流，该理论值与实测驱动电流值相减可以得到第1个误差约束关系。再将计算出的载流子浓度带入等式和等式，可以得到理论上的激光器出光功率，将该理论光功率值与实测激光器光功率 相减可以得到第2个误差约束；第3个误差约束将由理论计算出的小信号响应与测试的小信号响应值给出。

现在进一步考虑加载小信号的情况以获得小信号响应的理论表达式。将等式带入速率方程等式，

 （16）

稳态方程，中载流子浓度和光子数均为稳态理论值 和时，等式重写为下面的形式

 （17）

 （18）

将等式和等式带入等式的第一个式子进行等式化解：

（19）

增益压缩因子本身较小，它与小信号的乘积值较小，现考虑在等式中假定可以忽略其影响，即；再考虑等式中第四项，该项中包含的相比其他项为2倍频高次项，高频信号在系统响应中不在考虑范围内，可忽略不考虑。由此，等式可简化为

 （20）

根据等式，等式的前三项为0，在略掉因子后，等式化简为

 （21）

用同样的方法，等式的第二个式子可以化简为

 （22）

由等式得到

 （23）

根据前面的描述，信号的响应等于对应频率处输出与输入信号的比值，假定小信号响应为线性频率响应 ，按照定义表示为小信号带来的输出信号 与输入信号 的比值

 （24）

将等式带入等式，并化简为等式的形式

 （25）

通常，我们在通信系统里面的信号响应有如下形式

 （26）

将等式写成等式的形式，那么，

 （27）

 （28）

将 带入等式和等式，将稳态下的光子数 用光功率 表示

 （29）

 （30）

等式和等式是忽略了 项得到的，为了进一步提高精度，假定只忽略高阶项，而不忽略 项，则可以得到

 （31）

 （32）

最后，响应函数需要进行归一化处理，因此不必关心刚才等式里面的X表达式是什么，在归一化处理时X被抵消掉了。归一化小信号响应为

 （33）

将上述的Y和Z带入等式，即可获得VCSEL的小信号响应数学表达式。在该表达式中存在许多的参数，需要采用非线性最优化获取最佳的参数值，使得在相同的温度和偏置电流影响下，按照等式输出的响应 与实测的响应输出一致。

表2提供了某些参数的可能（未必合适）初值，仅供参考：

1. 小信号模型初值设置的参考值

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 参数 | 参考初值 | 单位 |
|  | 0.7 | - |
|  | 1E-5 | - |
|  | 9.6E-9 | s |
|  | 1.5E-8 | W |
|  | 1.8E6 | s-1 |
|  | 4.97E5 | - |
|  | 3.8E-12 | s |
|  | 4.7E-8 | - |

1. 附录3：选做本题所需的基础知识

信息时代，信息的传输和处理在理论、技术和工程上都具有非常重要的地位和作用。信息必须通过信号来携带通过系统进行传输和处理。信号、系统、信号通过系统因而成为信息科学领域必须研究的三大基本对象。

1. 信号

物理或工程上的信号是变化着的物理量，最常用的是电压、电流、磁通量、光通量等，数学上可统一地用随机过程来表示，但在对基本概念和基本理论的介绍时，将随机过程用确定性的时间函数*f*(*t*)来代替，即信号就是函数，在下面的叙述中，信号和函数是完全相同的两个名词，不同的地方用不同的说法仅仅取决于作者的行文习惯。

经典的信号分析方法以傅里叶级数为基础：

满足狄利克雷条件的周期信号可以展开成傅里叶级数：



、、分别表示为：



式中：为信号的周期；为信号的基频，即角频率，，。

合并同频项：



式中：信号的幅值和相位分别为



这个表达式可以这样解读：

周期信号可以分解成一组频率、幅度、相位的正弦信号（写成余弦，但习惯上称为正弦）的叠加。这样一组参数和一个周期函数是一一对应的（就是可以互相确定），因此，对满足狄里赫利条件的周期函数，也可以表示成，与周期信号原来的表示相对比，这种表示方法的好处是：它将一般的周期信号分解成正弦信号（再给它一个帅气的名字：频率分量）的叠加，由于正弦信号被认为是物理上最简单的信号，因而就实现了数学上用简单表示复杂的思想。

下面的做法无论在理论上还是在实际上都是具有重大意义的创新：

为了能够在平面坐标系中直观地表示，将它分开为两组：

 → , 

**现在我们就可以很容易地建立起信号频谱的概念：**

（1）信号的频谱（三角频谱）：构成信号的各频率分量的集合，表征信号的幅值和相位随频率的变化关系，即信号的结构，是和的统称；

（2）信号的幅度谱：周期信号幅值随的变化关系，用表示；

（3）信号的相频谱：周期信号相位随的变化关系，用表示；

信号的频率也用表示，二者之间的关系是。

为了在形式上更简单，应用欧拉公式

，

傅里叶级数三角函数表达式可改写成





这就是周期信号的傅里叶复指数形式的表达式。

实际的信号往往并不是周期信号，这样上面的方法就不能直接使用了，不过没有关系，回忆在概率论课程中，尽管连续型随机变量没有了概率分布的概念，但我们可以引入概率密度，类似的做法导致了频谱密度概念的产生，详细过程因为没有概念上的障碍，所以就不写了，直接给出结果：

对函数，令 称为信号的傅里叶变换，它反映了中各个频率分量的“密度”的分布情况，也称为频谱密度函数，简称“频谱函数”，尽管和前面的频谱函数名字一样，但在不同的场合其内涵是不一样的，用的时候能够区分就可以了。

1. 系统

信号由变为（可以是地理位置的改变，也可以是形式上的改变）通常被理解为是因为受到了系统的作用，比如打电话时，我在北京说出来的声音是，你在海南听到的是，中间环节就统称为通信系统。

满足线性时不变（系统的功能不随时间变化）特性的系统被建模为线性常系数微分方程：



称为输入或激励，称为输出或响应。之所以会有俩名完全是不同专业习惯的原因。

通常这一模型是通过研究系统的组成元素、组成方式，按照其所遵从的物理规律得到的，就是我们所称的机理分析法。将系统分解成结构（表现为微分方程的阶数）和参数（方程系数）两大要素，也可以在假设结构已知的前提下，通过输入和其对应的输出，采用数学方法求解参数，这对应于我们所称的数据分析法。

这一模型反映的是输入输出函数之间整体上的对应关系。利用傅里叶变换的性质，方程两边同时取傅里叶变换，得到：



是输入、输出的频谱，是系统的频域模型－你猜的没错，右边就是普通的乘积运算（看看傅里叶变换有多厉害！）

1. 信号通过系统

在线性时不变假设下，从频域的观点看，系统对输入信号的作用就是将其频谱乘以，这个反映的是系统的全部功能，因而也被称为系统函数。它还有一个非常好的特点：它是某一条件（零状态）下系统对一特殊信号（冲激信号）的响应的傅里叶变换！这一事实启示我们，对系统建模还可以采用第三种方法：选择某些具有特殊性质的函数（比如本题所称的小信号）去激励系统，通过响应推测系统的性能。

将写成：我们就可以将信号通过系统后的响应按一个个的频率成分来分析：系统对输入的作用就是将一个个的频率分量幅度上加权（相乘），相位上相加（本题不太关注相位问题，因而可以不去深究）。

比如，假设时



这个系统的作用就是让频率低于的成分全部通过，让频率介于和之间的频率分量幅度衰减一半，让其他的频率成分衰减到0。

因而被称为系统的频率特性，称为幅频特性。

1. 带宽

实际的信号和实际的系统都不可能是在全部频率上都有非零值的，因而对信号，将其具有非零值或集中了主要能量的频率范围称为信号的带宽，对系统，将其使输出信号的幅度下降到最大值的倍数不小于某一数值（比如70.7%，称为-3dB带宽，31.6%，称为-10db带宽）范围称为系统的带宽。显然，系统的带宽越大，其所能通过的频率成分就越多，能承载的信息量也就越大。

注意：本文档仅仅适用于本题，并不对其他场合下的完整性和严谨性负责，请勿外传。