

全国第三届研究生数学建模竞赛



题 目 确定高精度参数的问题

武汉大学：何兆剑，彭金艳，梁凤

摘 要：

本文通过对给定的一系列观测值，利用微分方程反问题参数估计方法，对捕食——被捕食模型进行了高精度参数估计。并在数据处理的基础上进行了计算机模拟，得到了相应的数值结果，并对结果进行了讨论。

首先我们对航天器运动模型建立了普适的微分方程模型；然后对生态系统模型进行首次积分给出了问题一，问题二的参数的精确解，进而利用所求的参数求得了方程的数值解，并将其与原始观测值比较，得到了很小的相对误差；在问题三，问题四中，由于原始数据 3，数据 4 存在误差，并且它们有很明显的周期振荡现象，故采用小波技术对它们进行数据去噪处理，再分别对去噪前和去噪后的数据运用了搜索法和欧拉差分法，得到了在仿真效果最好意义下的参数最优解，且对求出的各组参数进行了仿真模拟比较，我们的结论是去噪后较去噪前好，差分法较搜索法优。

其主要结果如下：问题一的参数解依次为-2.0000, 0.200, 12.0004, -1.0000, 其中 α_5, α_6 满足关系式 $12.0004 \ln \alpha_5 - 1.0000 \alpha_5 + 2.0000 \ln \alpha_6 - 0.2000 \alpha_6 = 13.8203$

问题二的参数解依次-14.17013, 1.41701, 85.02336, -7.08536, 10.00, 60.00, 问题三在数据 2 下利用差分法得到的参数解依次为 2.06015, -0.10276, -10.16925, 1.01689, 数据 3 下利用差分法得到的参数解依次为 1.99665, -0.09985, -10.02907, 1.00242, 问题四在分别对时间数据和观测值小波处理后，利用差分法得到的参数解依次为 1.98312, -0.09893, -9.97123, 0.99693。最后利用微分方程的稳定性理论对解的性质进行了讨论。

关键词：反问题，最小二乘法，小波分析，欧拉公式，参数估计

1 问题的重述

包括“神舟六号”载人航天宇宙飞船、人造地球卫星等航天器围绕地球在轨运行的过程中，要受到很多力的作用，其中主要的是地球万有引力和航天器发动机作用力。

一：考虑航天器在仅受到地球万有引力、航天器自身发动机作用力的作用下作平面运动，将地球和航天器视为质点，试建立航天器运动的数学模型（只要列出模型，不要求解）。

显然这样的数学模型在精度上是远远不能满足实际需要的，在其他要求精确制导等有关高科技的实际问题中，我们都面临着类似的问题：我们必须建立高精度的数学模型，必须高精度地估计模型中的大批参数，因为只有这样的数学模型才能解决实际问题，而不会出现差之毫厘，结果却失之千里的情况。这时所建立数学模型的精度就成了数学模型的生命线。例如上述问题中的航天器还要受到地球质量分布不均匀所引起的摄动力，大气阻力，日、月及其它星球的摄动引力的影响，以及航天器发动机为调整航天器自身姿态运作时作用力的影响。这样不但数学模型十分复杂，而且在这些数学模型中还要涉及到许多重要的参数，如地球的引力场模型就有许多待定参数。不仅如此，在对航天器进行测量时，还涉及到观测站的地理位置以及设备的系统误差等参数。为此人们要设法利用长期积累的丰富的观测资料，高精度确定这些重要的参数。

由于航天器的问题太复杂，下面本题仅考虑较简单的确定高精度参数问题。

假设有一个生态系统，其中含有两种生物，即：A 生物和 B 生物，其中 A 生物是捕食者，B 生物是被捕食者。假设 t 时刻捕食者 A 的数目为 $x(t)$ ，被捕食者 B 数目为 $y(t)$ ，它们之间满足以下变化规律：

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[\alpha_1 + \alpha_2 y(t)] \\ y'(t) = y(t)[\alpha_3 + \alpha_4 x(t)] \end{cases} \quad (1)$$

初始条件为：

$$\begin{cases} x(t_0) = \alpha_5 \\ y(t_0) = \alpha_6 \end{cases}$$

其中 $\alpha_k (1 \leq k \leq 6)$ 为模型的待定参数。

通过对此生态系统的观测，可以得到相关的观测数据。观测数据的格式依次为：

观测时刻 t_j 、A 生物数目 $x(t_j)$ 、B 生物数目 $y(t_j)$

二：请利用有关数据，解决以下问题：

1) 在观测数据无误差的情况下，若已知 $\alpha_2 = \frac{1}{5}$ ，求其它 5 个参数 $\alpha_k (k=1,3,4,5,6)$ ？有关数据见数据文件：DATA1.TXT

2) 在观测数据无误差的情况下，若 α_2 也未知，问至少需要多少组观测数据，

才能确定参数 $\alpha_k (1 \leq k \leq 6)$ ？有关数据见数据文件：DATA1.TXT

3) 在观测资料有误差（时间变量不含有误差）的情况下，请分别利用观测数据 DATA2.TXT 和 DATA3.TXT, 确定参数 $\alpha_k (1 \leq k \leq 6)$ 在某种意义下的最优解，并与仿真结果比较，进而改进你们的数学模型。

4) 假设连观测资料的时间变量也含有误差，试利用数据 DATA4.TXT，建立数学模型，确定参数 $\alpha_k (1 \leq k \leq 6)$ 在某种意义下的最优解。

2 航天器运动的数学模型

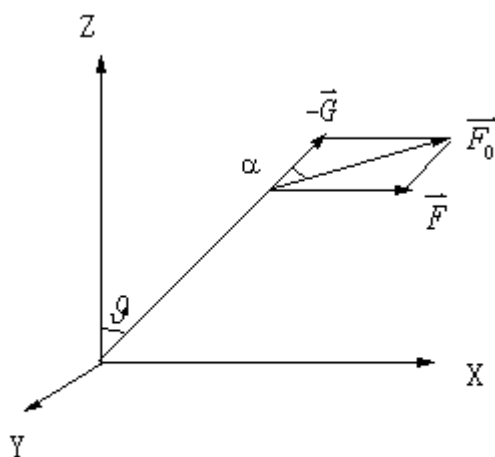
2.1 模型假设

- (1). 航天器仅受地球万有引力和航天器自身发动机作用力下做平面运动；
- (2). 将地球和航天器视为质点。

2.2 符号说明

- (1). \vec{G} 是地球万有引力；
- (2). \vec{F}_0 是发动机作用力；
- (3). \vec{F} 是二力合成后的平面力；
- (4). X, Y, Z 是三维空间对应的坐标轴， x, y, z 是空间中点对应的坐标轴 X, Y, Z 上的值。

2.3 模型的建立



图（一） 航天器受力图

分析上图，航天器在平面力 \vec{F} 下，作高度为 z_0 的平面运动， $z = z_0$ ，由模型假设

中条件和牛顿运动第二定律建立下列模型：

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_0 = (z, \vec{r}) = (\sqrt{z^2 + |\vec{r}|^2}, \theta, \varphi) \\ m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \\ \vec{r}_0(t_0) = (z_0, \vec{r}(t_0)) \\ z = z_0 = r_0 \cos \theta \\ |\vec{F}|^2 = |\vec{G}|^2 + |\vec{F}_0|^2 - 2|\vec{G}||\vec{F}_0|\cos \alpha \end{array} \right.$$

说明：此模型是最理想状况下的模型，我们并没有复杂的参数！

3 生态系统模型背景的理论

理论 1: 对于一个生态系统，含有 A 生物和 B 生物，其中 A 生物为捕食者，B 生物为被捕食者，假设 t 时刻捕食者 A 的数目为 $x(t)$ ，被捕食者 B 的数目为 $y(t)$ ，它们之间满足以下变化规律：

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[\alpha_1 + \alpha_2 y(t)] \\ y'(t) = y(t)[\alpha_3 + \alpha_4 x(t)] \end{cases}$$

初始条件为：

$$\begin{cases} x(t_0) = \alpha_5 \\ y(t_0) = \alpha_6 \end{cases}$$

α_k ($1 \leq k \leq 6$) 为待定系数。

在这个方程组中当 $\alpha_2 < 0, \alpha_4 < 0$ 时该系统是竞争模型；如果 $\alpha_2 \alpha_4 < 0$ 该系统是捕食-被捕食模型；当 $\alpha_2 > 0, \alpha_4 > 0$ 时该系统是互惠模型。该模型是捕食-被捕食模型即 Vloterra 模型。

$-\alpha_1$ 代表捕食者的自然死亡率；

α_2 反映捕食者对被捕食者的供养能力；

α_3 代表净自然增长率；

$-\alpha_4$ 反映捕食者掠取食物的能力。

我们可以得到系统的平衡点为 $P_0(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, -\frac{\alpha_3}{\alpha_4})$ ，被捕食者的数量围绕 $-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ 周

期性改变，捕食者数量围绕 $-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ 改变。当捕食者增长率 α_3 下降时，或捕食者掠取食物的能力 $-\alpha_4$ 增加时，捕食者会减少。同样，捕食者死亡率 $-\alpha_1$ 下降或被捕食者对捕食者供养能力 α_2 提高，被捕食者会减少。

理论 2：超定方程组的最小二乘解

设线性方程组 $Ax=b$ 中， $A=(a_{ij})_{m \times n}$ ， b 是 m 维已知向量， x 是 n 维解向量。当 $m>n$ 即方程组中方程个数多于未知量的个数时，称此方程组为超定方程组。一般来说，超定方程组无解（此时为矛盾方程组），为此我们要求一个近似解，因此采用最小二乘法。记 $r=b-Ax$ ，称使 $\|r\|_2^2$ 最小的解 x^* 为方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解。

定理 1 x^* 是 $Ax=b$ 的最小二乘解的充分必要条件是 x^* 是 $A^T Ax=A^T b$ 的解。

证：充分性 若存在 n 维向量 x^* 使 $A^T Ax=A^T b$ 。任取一组向量 $\bar{x} \neq x^*$ ，令 $y=\bar{x}-x^*$ ，则 $y \neq 0$ ，且

$$\begin{aligned}\|b-A\bar{x}\|_2^2 &= \|b-Ax^*-Ay\|_2^2 = (b-Ax^*-Ay, b-Ax^*-Ay) \\ &= (b-Ax^*, b-Ax^*) - 2(Ay, b-Ax^*) + (Ay, Ay) \\ &= \|b-Ax^*\|_2^2 - 2y^T A(b-Ax^*) + \|Ay\|_2^2 \\ &= \|b-Ax^*\|_2^2 + \|Ay\|_2^2 \\ &\geq \|b-Ax^*\|_2^2\end{aligned}$$

所以 x^* 是 $Ax=b$ 的最小二乘解。

必要性 r 的第 i 个分量为 $r_i = b_i - \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k$ ， $i=1,2,\dots,m$ ，记

$$\|r\|_2^2 = I(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m (b_i - \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k)^2$$

由多元函数求极限的必要条件，可得

$$\frac{\partial I}{\partial x_j} = -2 \sum_{i=1}^m (b_i - \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k) a_{ij} = 0, \quad i=1,2,\dots,n$$

$$\text{即} \quad \sum_{k=1}^n \left[\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} a_{jk} \right) \right] x_k = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (*)$$

由线性代数知识知 (1) 写成矩阵形式为

$$AAx = Ab \quad (*')$$

它是关于 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性方程组，称为正规方程组或法方程组。

下面讨论 $(*)'$ 解的存在唯一性。

由于 AA 是 n 阶方阵，且是对称阵。当 $R(A) = n$ 时，对任意 $y \neq 0$ 有 $Ay \neq 0$ ，

所以 $y'(AA)y = (Ay, Ay) = \|Ay\|_2^2 > 0$ ，可见 AA 是正定矩阵，必有 $\det(A) > 0$ ，故式 $(*)'$ 的解存在且唯一。此方程组可用平方根法或 SOR 法求解。

理论 3：小波变换在信号去噪中的应用

小波变换是一种信号与信息处理的工具，它利用联合时间—尺度函数，在所谓时间—尺度平面上描述分析信号。

典型的信号去噪要经过以下过程：信号被变换到变换域，在那里噪声成分更容易被识别，然后用阈值操作移除噪声，再反变换回去，重构没有噪声的信号。事实证明，小波变换能够成功使信号中的有用信号和噪声分离。

小波变换的如下优点：低熵性，小波系数的稀疏分布使得信号变换后的熵降低；多分辨率，由于采用了多分辨率的方法，可以非常好的刻画信号的非平稳特性；去相关性，因为小波变换可以对信号进行去相关，且噪声在变换后有白化趋势，所以小波域比时域更利于去噪；选基灵活性，由于小波变换可以灵活选择变换基，从而对不同的应用场合，对不同的应用场合，对不同的应用场合，对不同的研究对象，可以选用不同的小波母函数，以获得最佳的效果。

在实际研究中，分别有利用幅度特征和相位特征进行去噪的算法。

4 问题的分析和求解

4.1 问题一的分析和求解

在观测数据无误差和 α_2 值已知的情况下，此时我们先不考虑 $x(t), y(t)$ 的初值 α_5, α_6 ，对方程组进行不定积分得到一个等式，再利用 DATA1.TXT 给定的数据列出了六个方程，而这六个方程中只有四个未知量 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, C$ ，这样就构成了一个超定方程组，然后根据定理 1 给出的理论依据（最小二乘法）编程将方程组的近似解求出。这样就确定了 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 的值，再将初值 α_5, α_6 代入等式中，就得到了 α_5, α_6 的关系式。

对方程组

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[\alpha_1 + \alpha_2 y(t)] \\ y'(t) = y(t)[\alpha_3 + \alpha_4 x(t)] \end{cases}$$

进行化简。首先在方程组两式右侧均不为零的情况下相除：

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x \cdot \alpha_1 + \alpha_2 y}{y \alpha_3 + \alpha_4 x}$$

对上式做变量分离得到：

$$\frac{\alpha_3 + \alpha_4 x}{x} dx = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 y}{y} dy$$

然后进行不定积分我们得到：

$$\alpha_3 \ln x + \alpha_4 x - \alpha_1 \ln y - \alpha_2 y = C \quad (2)$$

即

$$\alpha_1 \ln y - \alpha_3 \ln x - \alpha_4 x + C = -\alpha_2 y \quad (3)$$

把 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, C$ 看作未知量，因为 α_2 是已知量，此方程在 DATA1.TXT 给定的六组数据下构成了一个超定方程 $Ax = b$ ，其中

$$A = \begin{pmatrix} \ln y_1 & -\ln x_1 & -x_1 & 1 \\ \ln y_2 & -\ln x_2 & -x_2 & 1 \\ \ln y_3 & -\ln x_3 & -x_3 & 1 \\ \ln y_4 & -\ln x_4 & -x_4 & 1 \\ \ln y_5 & -\ln x_5 & -x_5 & 1 \\ \ln y_6 & -\ln x_6 & -x_6 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} -\alpha_2 y_1 \\ -\alpha_2 y_2 \\ -\alpha_2 y_3 \\ -\alpha_2 y_4 \\ -\alpha_2 y_5 \\ -\alpha_2 y_6 \end{bmatrix}$$

我们根据定理 1 得到方程的解

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0000 \\ 12.0004 \\ -1.0000 \\ 13.8203 \end{bmatrix}$$

将初始条件

$$\begin{cases} x(t_0) = \alpha_5 \\ y(t_0) = \alpha_6 \end{cases}$$

代到微分方程组(1)中得到：

$$\alpha_3 \ln \alpha_5 + \alpha_4 \alpha_5 - \alpha_1 \ln \alpha_6 - \alpha_2 \alpha_6 = C \quad (4)$$

我们将 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, C$ 代入就得到了 α_5, α_6 之间的关系式：

$$12.0004 \ln \alpha_5 - 1.0000 \alpha_5 + 2.0000 \ln \alpha_6 - 0.2000 \alpha_6 = 13.8203$$

因此在观测数据无误差且已知 $\alpha_2 = \frac{1}{5}$ 的情况下，我们求得
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0000 \\ 12.0004 \\ -1.0000 \end{bmatrix},$$

而 α_5, α_6 没有确定解，它们满足如下关系式

$$12.0004 \ln \alpha_5 - 1.0000 \alpha_5 + 2.0000 \ln \alpha_6 - 0.2000 \alpha_6 = 13.8203。$$

4.2. 问题二的分析和求解

在观测数据无误差而 α_2 值未知的情况下，我们此时采用 DATA1.TXT 的第一组数据作为 α_5, α_6 的值，那么这与第一问 α_5, α_6 未知的情况有所区别，此处采用定积分来求解。再利用给定的数据以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为未知量，利用搜索法在给定 α_2 的范围内进行搜索，任意取三组数据，求解线性方程组得到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的值，再将该组值代入微分方程组中求相应时刻的数值仿真值，最后我们通过寻找偏差最小值来确定出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的数值解。

类似问题一我们对方程组

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[\alpha_1 + \alpha_2 y(t)] \\ y'(t) = y(t)[\alpha_3 + \alpha_4 x(t)] \end{cases}$$

做比式再做变量分离得

$$\frac{\alpha_3 + \alpha_4 x}{x} dx = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 y}{y} dy$$

对上式做定积分得到

$$\alpha_3 \ln x - \alpha_3 \ln \alpha_5 + \alpha_4 x - \alpha_4 \alpha_5 = \alpha_1 \ln y - \alpha_1 \ln \alpha_6 + \alpha_2 y - \alpha_2 \alpha_6$$

其中 $\alpha_5 = 10.00000, \alpha_6 = 60.00000$ （即表中 $t=0$ 时的观测数据）。

因为 DATA1.TXT 给出了 x, y 观测数据的精确值， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是题中的未知量。

利用 Fortran 软件，我们给出算法如下：

Step1 先给定 α_2 在 $(0, 10)$ 的范围内，以 0.001 为步长搜索 α_2 ；

Step2 给定 α_2 后，任意取三组数据，求解线性方程组得到 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ ；

Step3 循环 α_2 ，用最小二乘法原理确定 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的值。

在步骤（1）中就相当于 α_2 的值给定了， $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 是未知量，则任意三组数

据就确定了 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 的值。而 α_2 在 $(0, 10)$ 中搜索，因而能得到 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 的多组值。

将每组参数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的值代入之后用 Matlab 中 ode45 命令求解

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[\alpha_1 + \alpha_2 y(t)] \\ y'(t) = y(t)[\alpha_3 + \alpha_4 x(t)] \end{cases}$$

的数值解，可以得到与观测时间 t_j 相对应的值 $x^*(t_j)$ ， $j=1, 2, \dots, 6$ 。

我们利用最小二乘法原理使相对误差最小，这样就确定了 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的近似精确解。我们解得

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.17013 \\ 1.41701 \\ 85.02336 \\ -7.08536 \\ 10.00000 \\ 60.00000 \end{bmatrix}$$

在这组数据下的仿真值与观测值的相对误差 D 为 0.861%。

这里，相对误差的定义为 $D = \frac{|X-X^*|/X + |Y-Y^*|/Y}{N}$ ，其中

$$X = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ \vdots \\ x(t_N) \end{bmatrix}, \quad X^* = \begin{bmatrix} x^*(t_1) \\ \vdots \\ x^*(t_N) \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ \vdots \\ y(t_N) \end{bmatrix}, \quad Y^* = \begin{bmatrix} y^*(t_1) \\ \vdots \\ y^*(t_N) \end{bmatrix}$$

（以下相对误差定义相同）

对于此问题我们是在给定 α_2 范围内进行搜索，一共利用了四组数据确定了参数 $\alpha_k (1 \leq k \leq 6)$ 的值。因此在观测数据无误差且 α_2 未知的情况下，我们至少需要四组观测数据，才能确定参数 $\alpha_k (1 \leq k \leq 6)$ 的值。

4.3. 问题三的分析 and 求解

由于本问题中观测数据有误差，首先要对数据进行预处理。我们在数据处理中遇到的误差大致可分为过失误差、系统误差和随机误差，而一般情况下误差都

可以看成噪音，因此我们要选择一种方法去除噪音。观测数据 DATA2.TXT 和 DATA3.TXT 的散点见图 1，图 2，对于 DATA3，我们发现观测值的分布有很明显的周期性，且在图行的谷值处带有很明显的毛刺，也就是我们通常说的噪音，因此由理论 5——小波变换在信号去噪中的应用理论保证，我们可以先对数据 3 利用 Matlab6.5 中命令 Wden，并采用 Daubechies 小波 db4 进行预处理。对于数据 2，它有比较好的周期性，所不同于数据 3 的是它明显较数据 3 无噪音，故没有必要对它进行小波去噪。

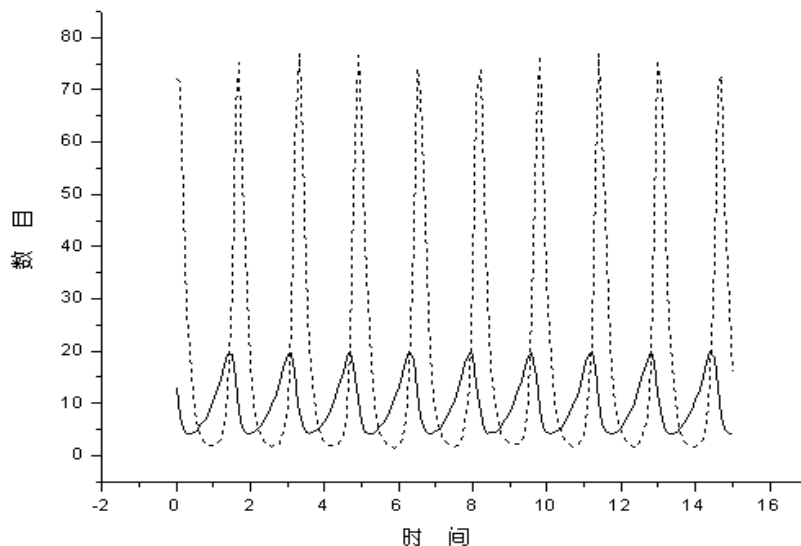


图 1 DATA2.TXT 的散点图，实线是数目 X,虚线是数目 Y

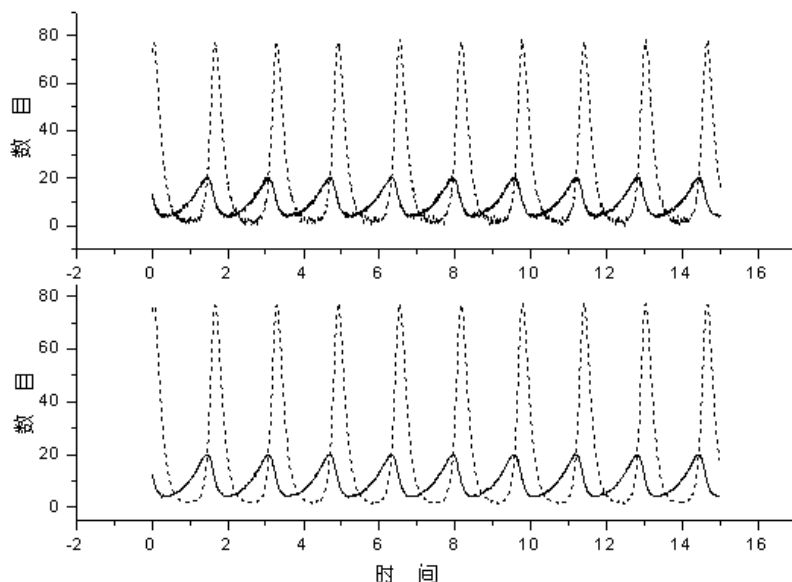


图 2 DATA3.TXT 的散点图和滤噪后的散点图，实线是数目 X，
虚线是数目 Y 上部分是观测值，下部分是滤噪值

方法一：<搜索法>

类似问题一的方法我们得到方程：

$$\alpha_3 \ln x + \alpha_4 x - \alpha_1 \ln y - \alpha_2 y = C$$

我们将数据 2 和噪声处理后的数据 3 代入到该方程中得到两个超定方程组。

搜索法的具体步骤如下：

Step1: 由于给定的模型是捕食—被捕食模型，根据模型参数设定 $\alpha_2 > 0$,

我们给定 $\alpha_2 \in [0.01, 10]$ ，以步长为 0.01 进行搜索。在给定的 α_2^0 值后，超定方程变为

$$-\alpha_1 \ln y + \alpha_3 \ln x + \alpha_4 x - C = \alpha_2^0 y$$

记

$$A = \begin{bmatrix} -\ln y_1 & \ln x_1 & x_1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\ln y_{151} & \ln x_{151} & x_{151} & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha_1 y_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 y_{151} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ C \end{bmatrix}$$

Step2: 由定理 1 解超定方程有：

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B$$

我们得到一组解

$$X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1^0 \\ \alpha_3^0 \\ \alpha_4^0 \\ C^0 \end{bmatrix}$$

Step3: 将求解的参数值 $\begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{30} \\ \alpha_{40} \\ C_0 \end{bmatrix}$ 代入原微分方程组

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[\alpha_1 + \alpha_2 y(t)] \\ y'(t) = y(t)[\alpha_3 + \alpha_4 x(t)] \end{cases}$$

利用 Fortran 软件编程求解此微分方程组的仿真解 $x^*(t_j), y^*(t_j)$ $j=1, 2, \dots, 151$ 。

Step4: 利用最小二乘法原理求得仿真值与观测值相对误差 D 最小的 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, C$ 。

运行数据 2 的结果为：

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.00859 \\ 0.101000 \\ 10.08322 \\ -1.00909 \\ -14.0867 \end{bmatrix}$$

仿真值与观测值相对误差为 2.68386。对应的仿真数据分布和 DATA2 分布比较见图 3。

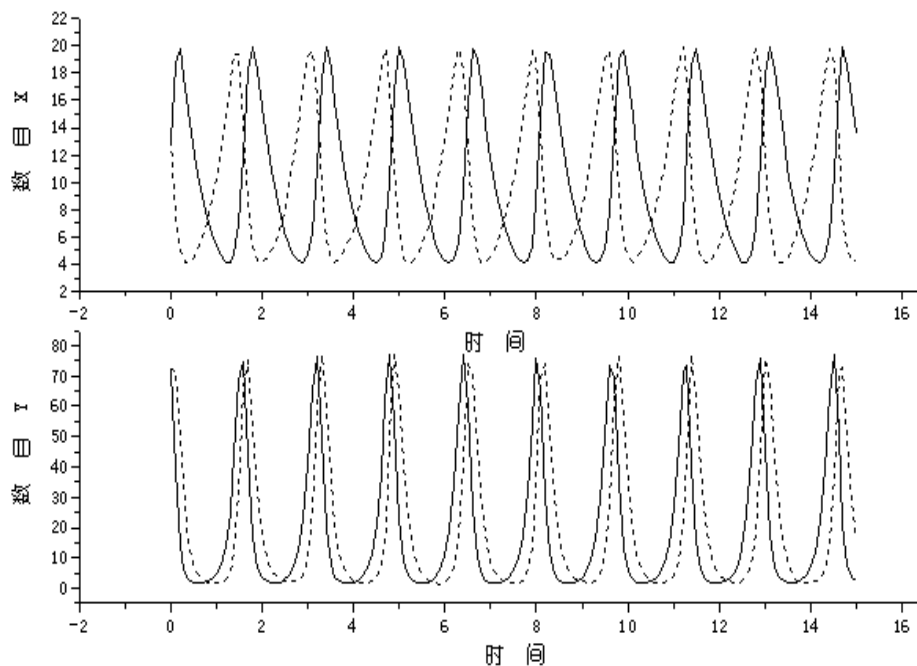


图 3 搜索仿真数据散点图（虚线）和
观测 DATA2 数据（实线）散点图的比较

将数据 3 进行噪声处理后，代入以上步骤运行的结果为：

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.99816 \\ 0.101000 \\ 10.03055 \\ -1.00069 \\ -14.02104 \end{bmatrix}$$

仿真值与观测值相对误差为 2.27025。对应的仿真数据散点图和 DATA3 散点图比较见图 4。

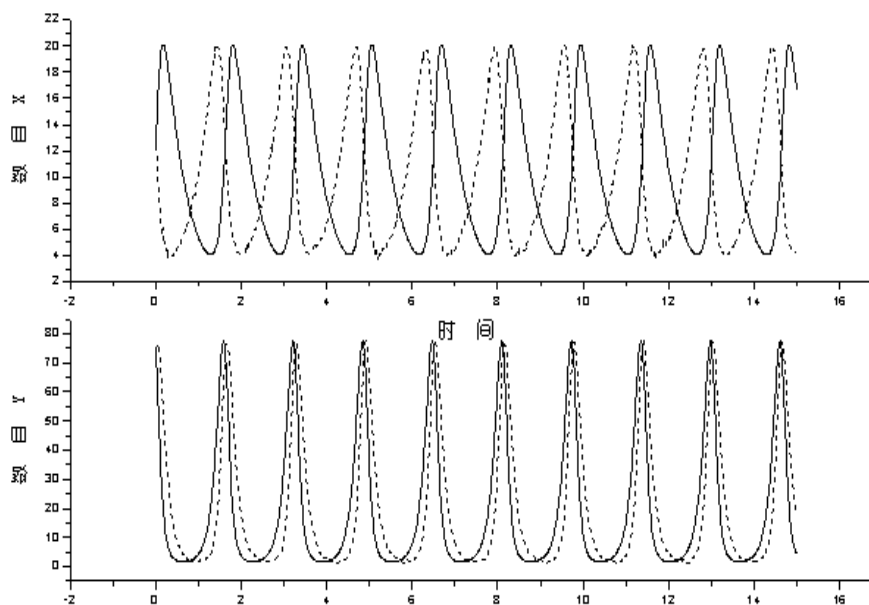


图 4 搜索仿真数据散点图（虚线）和观测 DATA3 数据（实线）

散点图的比较

方法二：<欧拉差分法>

由原微分方程组我们将其变形得到：

$$\begin{cases} d\ln x = (\alpha_1 + \alpha_2 y) dt \\ d\ln y = (\alpha_3 + \alpha_4 x) dt \end{cases} \quad (5)$$

(5)式在区间 $[t(i), t(i+1)]$ 上积分得，

$$\begin{cases} \ln(x(t_{i+1}) - x(t_i)) = \alpha_1(t_{i+1} - t_i) + \alpha_2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} y(t) dt \\ \ln(y(t_{i+1}) - y(t_i)) = \alpha_3(t_{i+1} - t_i) + \alpha_4 \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt \end{cases}$$

我们记 $S_{1,i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt$, $S_{2,i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} y(t) dt$, 由于 $x(t)$, $y(t)$ 均为未知，因此不能直接

求出 $S_{1,i}$, $S_{2,i}$, 利用数值积分法中的梯形求积公式得：

$$\begin{aligned} S_{1,i} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt \approx \frac{t_{i+1} - t_i}{2} (x(t_{i+1}) + x(t_i)) \\ S_{2,i} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} y(t) dt \approx \frac{t_{i+1} - t_i}{2} (y(t_{i+1}) + y(t_i)) \end{aligned}$$

于是得到参数方程组：

$$A_1 P_1 = B_1$$

$$A_2 P_2 = B_2$$

其中：

$$A_1 = \begin{bmatrix} t_2 - t_1 & S_{2,1} \\ \vdots & \vdots \\ t_{151} - t_{150} & S_{2,150} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} t_2 - t_1 & S_{1,1} \\ \vdots & \vdots \\ t_{151} - t_{150} & S_{1,150} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \ln \frac{x(t_2)}{x(t_1)} \\ \vdots \\ \ln \frac{x(t_{151})}{x(t_{150})} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \ln \frac{x(t_2)}{x(t_1)} \\ \vdots \\ \ln \frac{x(t_{151})}{x(t_{150})} \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

因此方程组参数的最小二乘解为：

$$P_1 = (A_1' A_1)^{-1} A_1' B_1, \quad P_2 = (A_2' A_2)^{-1} A_2' B_2$$

利用 Fortran 软件编程代入数据(2)编程得拟合结果：

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.06015 \\ -0.10276 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} -10.16925 \\ 1.01689 \end{bmatrix}$$

得到的仿真值与观测值的相对误差为 1.61853。仿真数据分布和 DATA2 分布比较见图 5。

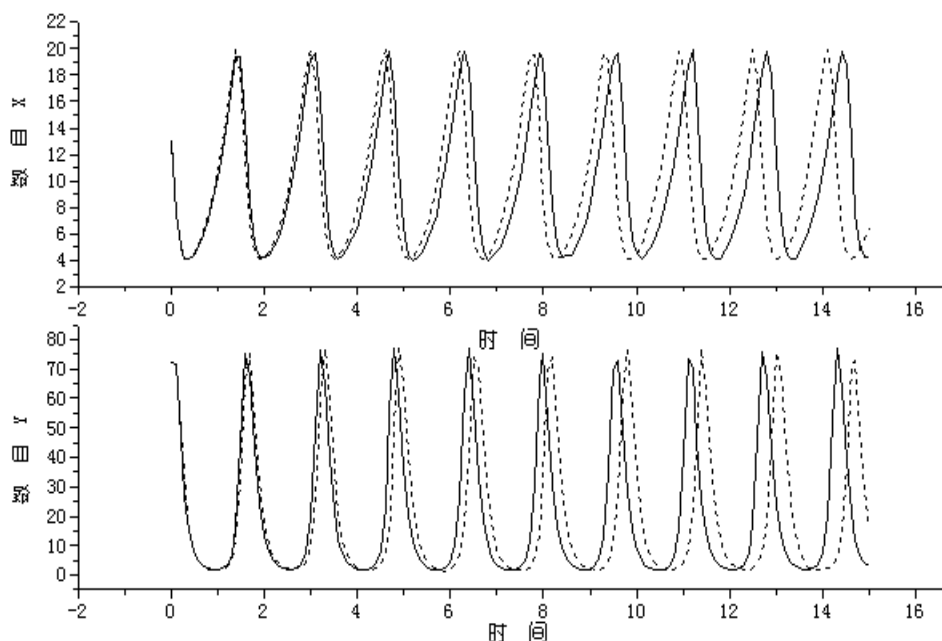


图 5 差分仿真数据散点图（虚线）和观测 DATA2 数据（实线）散点图的比较

代入滤噪后的数据(3)编程得拟合结果：

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.99665 \\ -0.09985 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} -10.02907 \\ 1.00242 \end{bmatrix}$$

得到的仿真解与无噪声观测值的相对误差为 0.08618,其相应的数据分布见图 6。

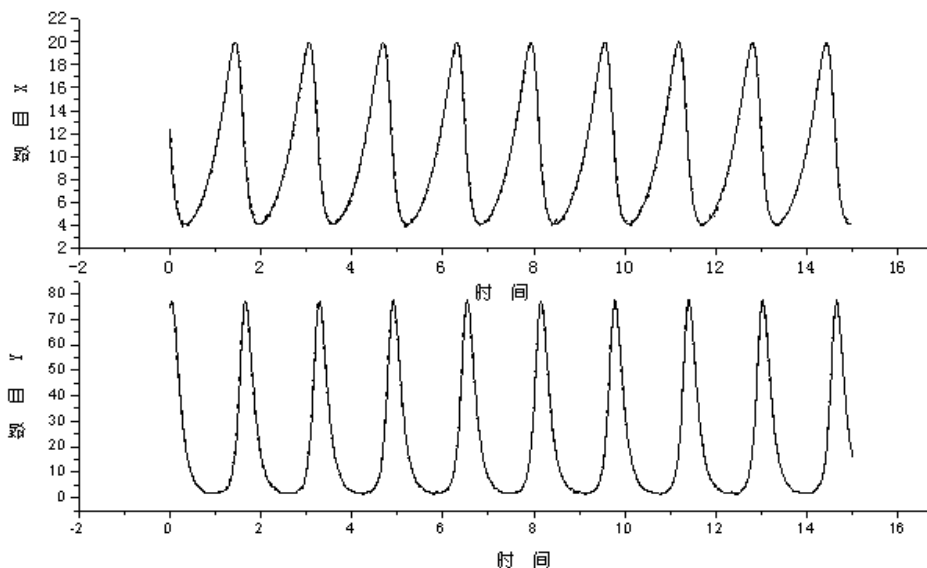


图 6 差分仿真数据（虚线）散点图和滤噪 DATA3
数据（实线）散点图的比较

分析结果：DATA2 无论在搜索法还是在差分法中得到的仿真解与观测值的相对误差都较大，这需要改进模型。由于在种群的相互竞争中还存在种群内部的竞争，所以原来的模型考虑得不是很全面，由于捕食者之间的竞争的影响因素更大些，并且通过计算机模拟在增加了与之相关的参数 α_7 之后仿真值和观测值的误差明显减少。因此我们将模型改为下列形式：

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[\alpha_1 + \alpha_7 x(t) + \alpha_2 y(t)] \\ y'(t) = y(t)[\alpha_3 + \alpha_4 x(t)] \end{cases} \quad (6)$$

根据上面的步骤得到的结果为：

$$P_1' = \begin{bmatrix} 2.04973 \\ 0.00105 \\ -0.10276 \end{bmatrix}, \quad P_2' = \begin{bmatrix} -10.16925 \\ 1.01689 \end{bmatrix}$$

得到的模拟的相对误差为 1.00141，其相应的数据分布见图 7。

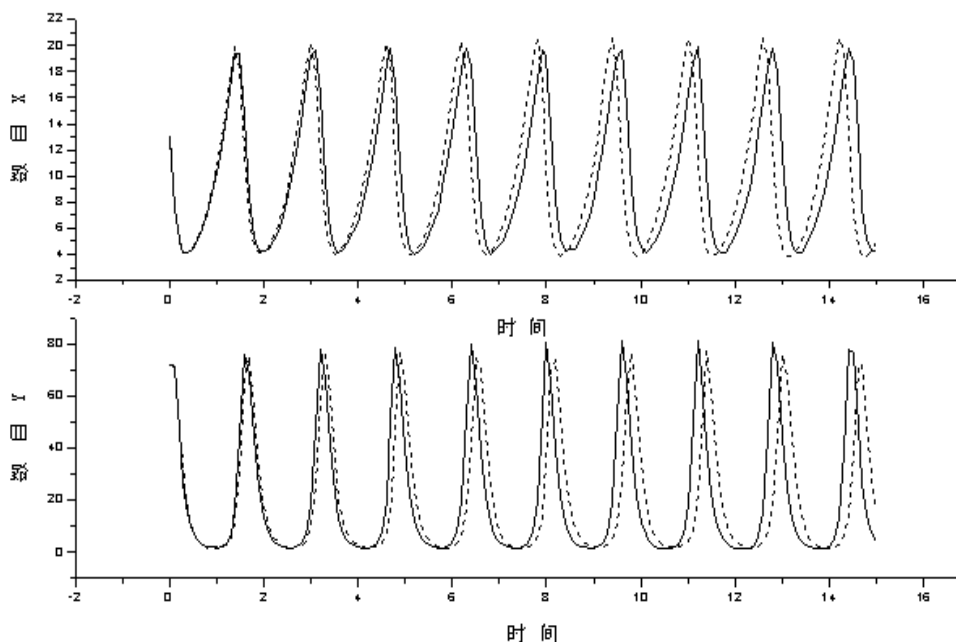


图 7 改进后仿真数据（虚线）散点图和观测
DATA2 数据（实线）散点图的比较

注：(1). 对于 DATA2，它的时间间隔太大，因此在改进模型之后模拟的相对误差仍然较大，若能给出步长较为细的数据我们将会得到更为好的模拟。由于存在观测数据的误差和小区间段 $[t(i), t(i+1)]$ 上定积分数值近似计算结果的误差，常使 $|(A_1' A_1)^{-1}|$ 值极高。因此，参数反问题的数值解通常是不稳定的。因参数反问题不稳定，致使超定方程组 $A_1 P_1 = B_1$ 和 $A_2 P_2 = B_2$ 是病态方程组，当观测值 $t(i)$ 越大，则病态问题愈严重，在模拟图中有更为直观的表现，时间越往后，仿真模拟效果越差。通常处理病态问题的技术有对矩阵作预处理和阻尼最小二乘法等，它可以采用光滑化方法和近似化方法和统计反演法等稳定化算法来求解，由于设计内容太深，这里不详细讨论。而对于 DATA3 经过小波去噪之后利用差分法我们已经得到了很好的模拟效果，并且我们在改进的模型(6)下得到的结果并不比在原模型(1)下的效果好，所以对于 DATA3 不用改进模型。

(2). 搜索法对应的初值参数 α_5, α_6 满足关系式：

$$\alpha_3 \ln \alpha_5 + \alpha_4 \alpha_5 - \alpha_1 \ln \alpha_6 - \alpha_2 \alpha_6 = C,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为对应的求出的参数解。

(3). 经过分析和比较我们发现，在没有经过去噪的数据上运行的结果相对误差较大，甚至对于只有很小误差的数据二最终模拟的效果也不太好；并且差分法运行的结果比搜索法运行的结果要好，因此在下面的问题四中我们只对它进行差分法计算结果。

4.4. 问题四的分析和求解

DATA4 的数据既有时间变量上的误差，又有观测数据上的误差，所以在求解这个数据下的参数时，我们一定要对数据进行预处理，否则会产生很大的误差。

方法一：（对时间不进行处理）

同问题三的求解过程，忽略时间误差带来的影响，利用滤波处理后的 x 值和 y 值经过差分法得到的结果：

$$P_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.39567 \\ -0.06848 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.90083 \\ 0.69566 \end{bmatrix}$$

相对误差为 5.09002。仿真值与去噪数据分布见图 8：

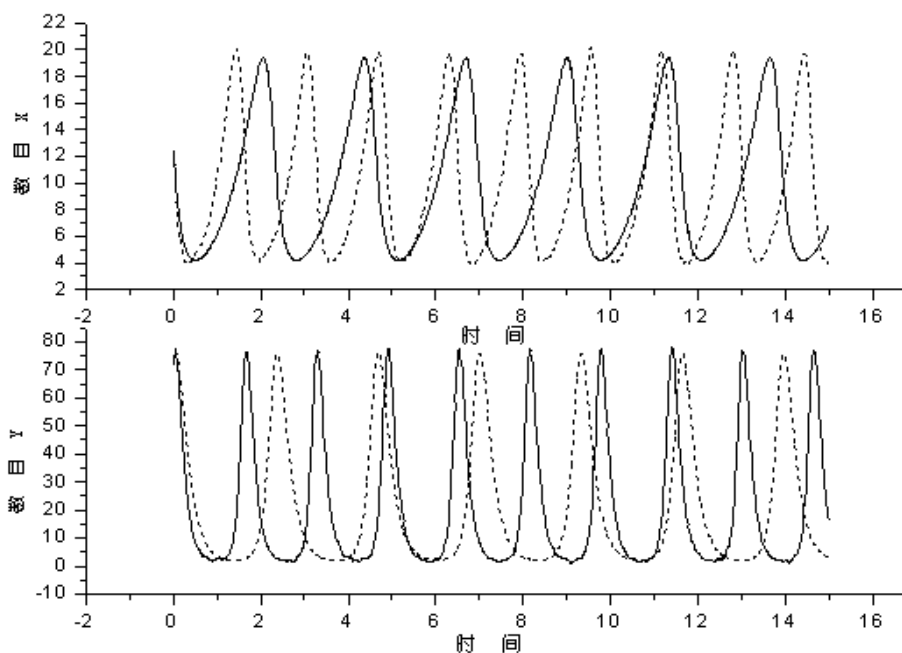


图 8 时间无拟合条件下，差分仿真数据（虚线）散点和滤噪 DATA4 数据（实线）分布的比较

方法二：（对时间进行处理）

首先用 origin 软件对时间变量进行拟合得到无误差的时间数据。然后在拟合的时间变量的基础下，利用小波技术对 DATA4 的 x 变量和 y 变量进行去噪，这时我们对 DATA4 中有噪音的数据进行光滑化处理，得到一组滤噪后的数据（相应的分布和观测数据分布比较见图 9）。最后利用差分法类似问题三给出参数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的数值解。

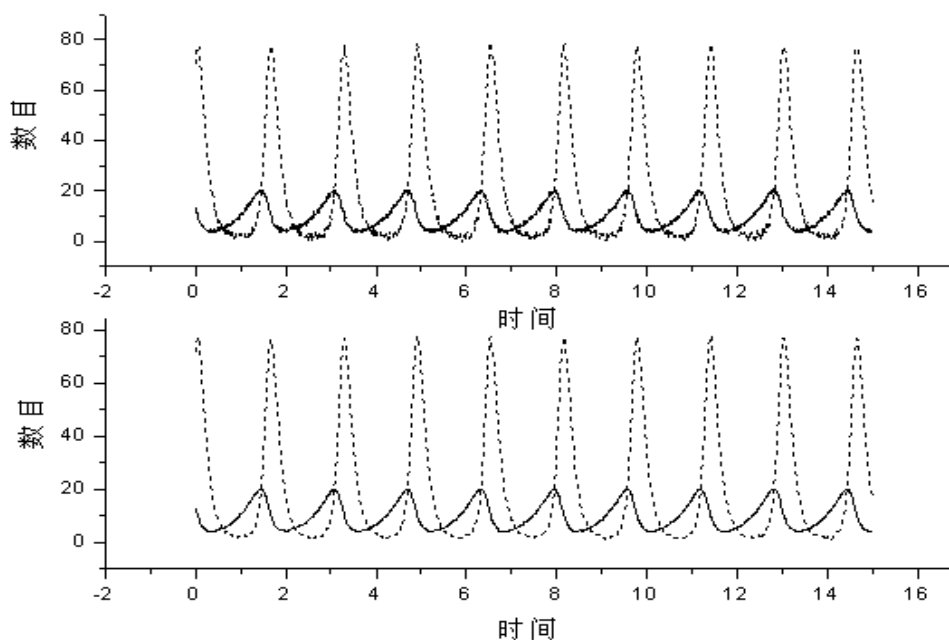


图 9 时间拟合条件下，DATA4 滤噪数据散点图（下部）和观测 DATA4 数据散点图（上部）的比较实线是数目 X,虚线是数目 Y

利用 Fortran 软件编程求得：

$$P_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.98312 \\ -0.09893 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.97123 \\ 0.99693 \end{bmatrix}$$

相对误差为 0.13949，相应的仿真值与去噪数据的散点图比较见图 10。

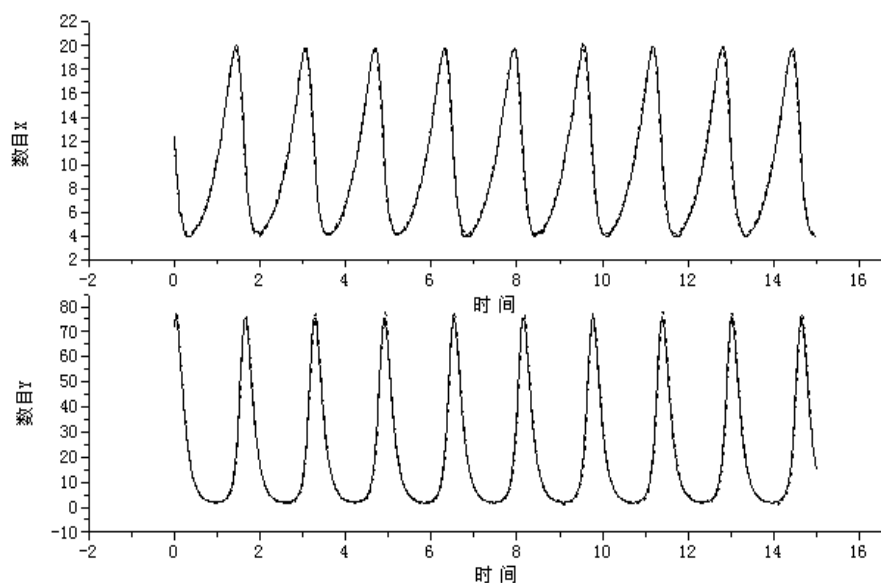


图 10 时间拟合条件下，差分仿真数据（虚线）散点图和 DATA4 滤噪数据（实线）散点图的比较

分析结果：比较上面两种方法我们可以看到在对时间不进行处理的情况下相对误差很大，而对时间处理后的情况下误差很小，由此可见时间变量的误差对结

果的影响很大，因此第二种方法是比较可行的方法。

5 模型的评议

问题一和问题二的参数都是在无误差观测值下求出的解，并且检验发现仿真结果有很高的精度，因此我们认为它们即为我们要求的参数的数值解，在问题一中我们只能给初始条件的参数一个关系表达式，也就是说只有当初始值满足条件 $12.0004 \ln \alpha_5 - 1.0000 \alpha_5 + 2.0000 \ln \alpha_6 - 0.2000 \alpha_6 = 13.8203$ 时才是给定数据下的高精度的参数解，这是我们此题所得结果的一个特点；问题三和问题四的求解方法不用赋初值，直接利用数据较多的特点进行差分来确定参数的数值解，在此系统中我们认为初值即 t_0 时刻的观测值，并且参数的最优解是在仿真模拟效果最好的意义下做出来的。在整个求解过程中微分方程的稳定性理论保证了解的唯一存在性。

参考文献：

- [1] 张志涌等 精通 Matlab 6.5 版 北京：北京航空航天大学出版社，2003
- [2] 宋来忠 王志明 数学建模与实验 北京：科学出版社，2005
- [3] 刘承平 数学建模方法 北京：高等教育出版社，2003
- [4] 郑慧娆 陈绍林等 数值计算方法 武汉：武汉大学出版社，2004
- [5] 李铁博 于明 相位保留小波去噪法及其在基因芯片图像中的应用 天津：河北工业大学
- [6] 吴新元 常微分方程中一类反问题及其应用 数学实践与认识 1987 4
- [7] A.H. 吉洪诺夫 B.Г. 阿尔先宁 不适定问题的解法 王秉忱译 北京：地质出版社，1979
- [8] 姜启源 谢金星 叶俊 数学模型 北京：高等教育出版社，2003