

全国第六届研究生数学建模竞赛



题 目 与封堵溃口有关的重物落水后运动过程的数学建模

摘 要：

本文主要讨论了封堵溃口的重物落水后的运动规律问题,包括大实心方砖落水运动过程模型和适合普遍试件落水后的运动过程模型,并对模型进行了误差分析,最后利用相似准则将模型推广到实际应用。

在问题一中,我们首先分析了影响重物在水中运动过程的主要因素,然后根据相关力学知识对大实心方砖进行受力分解,从而建立了其运动过程的数学模型。

考虑问题二时,在问题一中的模型基础上做了进一步改进,利用高等流体力学相关知识建立了多重网格虚拟边界有限元法,得到了能够适应不同情况的单个重物在水中运动过程模型。

对问题三,首先利用软件 MATLAB 对小型试验数据进行去噪处理,然后对问题二中提出的模型进行了误差分析,结果为:小空心蜂巢以平放、竖放和立放三种投掷方式时模型的相对误差分别约为 14.59%、15.12%和 17.91%;对大实心方砖而言模型的相对误差分别约为 13.7%、10.3%和 20.1%;以任意方式投掷大三角锥时模型的相对误差约为 16.67%。

为了解决问题四,首先我们验证了模型满足雷诺准则和费劳德准则,然后结合模型和相对误差以及所满足的相似准则将小型试验模型加以推广,可以预测重物的最佳有效触底位置。当溃口水深为 3m,溃口流速为 4m/s 时,应提前 2~5m 投放;当溃口水深为 4m,溃口流速为 5m/s 时,应提前 4~8m 投放;。

关键词: 有效位置,运动过程,误差分析,流体力学,粘滞力,相似准则

参赛队号 10635004

队员姓名 蒋琴 汪星 刘姣姣

参赛密码 _____
(由组委会填写)

一、问题的提出

洪水灾害是自然灾害的一种，其范围广、损失大，而且常会诱发其他类型水害灾或造成间接灾害、次生灾害，尤其是溃坝溃堤，进而引发泥石流灾害给国家和人民生命财产带来严重损失。历年来的洪灾，尤其是最近的溃坝、泥石流险情给了我们深刻的教训：必须有效地开展封堵溃口的研究。由于溃口水流的流量和速度会比较大，在通常情况下很难在短时间之内将溃口彻底封堵，但如果通过投放重物对尚存的坝体产生一定的保护作用，就可以延缓溃坝溃堤的过程，为人民群众的撤离争取更多的时间。

显然，投入溃口的重物落水后受到溃口水流的作用会向下游漂移，为了使封堵用的重物落水后能够沉底到、并保持在预想的位置，尽可能减少无效投放，必须掌握重物落水后的运动过程，在预定沉底位置的上游一定距离投放达到一定体积和重量的重物。考虑到无法通过相关实物试验去研究重物落在溃口后的运动过程，我们只能先通过理论分析和小型试验获取相关数据的方法进行研究，选取几种重物形状、四种不同速度的稳定水流、在三种不同的高度多次重复进行投放试验，希望从大量数据的分析中发现重物在水中运动的规律，同时为机理模型的建立提供思路及检验模型用的数据。

由于溃口的纵、横断面千差万别，而且都不是规则的矩形、梯形或V字形；溃口的底面也都不是水平或具有稳定斜率的平面，粗糙度各异；溃口各部分的流速分布肯定也是不均匀的；溃口的形状和大小一般是不断变化的，流速、流量也随着水位和溃口形状的变化而变化；封堵用重物大都就地取材，其形状、大小千变万化，重量、体积、面积各不相同。为此，这里暂不考虑重物沉底后的稳定性，只探索重物落水后的运动规律。

在理论分析和小型试验数据分析的基础上，我们将根据水力学已经有的方法进行推广，同时变动试验的条件和物理、几何等参数再进行新试验，在获得成功并掌握重物在水中运动的规律后才能够最终应用于实际抢险行动。在已给的数据和条件下，本文讨论了如下四个问题：

1、分析影响重物在水中运动过程的因素，并建立大实心方砖落水后的运动过程的数学模型。

2、建立能够适应各种情况、描述重物在水中运动过程的数学模型。

3、根据所给数据，对建立的数学模型进行误差分析，并验证该数学模型的合理性。

4、根据所给材料及查阅相关资料，结合建立的数学模型，回答以下两个问题：

(1) 本题所提及的小型试验满足了什么相似准则？如何依据相似准则将本试验及所建立的数学模型成果加以推广，对未来需要进行的试验和研究工作提出建议。

(2) 假定溃口几何形状及水流速度与小型试验相似，溃口水深分别为3m和4m，溃口流速为4m/s和5m/s，若重物重量为1.5t，根据所建立的数学模型求解距离水面2m投放重物时，应分别提前多远投放才能使重物沉底到预定位置。

二、符号说明

全文通用的符号作如下说明：

h_1 ：向溃口投放重物时，重物重心距水平面的高度；

h_2 ：重物从接触水平面到沉入水底的竖直高度；

v ：重物在水中运动的瞬时速度；

f ：水流对重物各个接触面的粘滞阻力的合力；

ρ ：水的密度；

ρ' ：重物的密度；

m, M ：重物的质量；

V ：重物的体积；

θ ：粘滞阻力与竖直方向的夹角；

s ：重物沉底后与刚接触水平面时的水平距离；

η ：水的粘滞系数；

G ：重物自身的重力；

$v_{\text{水}}$ ：水流速度；

$F_{\text{冲}}$ ：水流对重物的冲力（又叫推动力）；

$F_{\text{浮}}$ ：水流对重物的浮力；

I ：单位张量；

u ：一般流体粘性系数；

δ ：运动粘性系数；

p ：为压力；

Ω_T ：整个计算区域；

Ω ：流体所占据的区域；

Ω_i ：物体所占区域；

I_i ：表示惯性矩张量；

ΔM_i ：表示物体质量与占据该物体相同体积的流体质量的质量差；

g ：是重力加速度；

X ：表示单元边线中点的坐标值；

X_i ：物体的质量中心坐标；

F_i ：流体作用在物体重心的流体力；

T_i ：流体作用在物体重心的力矩；

σ ：流相的应力张量；

U_i ：物体的平移速度；

ω_i ：物体的角速度；

θ_i ：物体的角度；

K ：时间步长；

T_h ：表示四边形有限单元；

h ：用来表征单元 T_h 最大宽度的参数；

M ：是指质量矩阵；

S ：矩阵；

B ：梯度矩阵；

$-B^T$ ：转置的散度矩阵；

\tilde{n}_n ：是包含扩散稳定因子的非线性项；

\tilde{N} ：是包含扩散项和对流项的矩阵。

三、模型假设

- ① 不考虑溃口和溃口底面的形状与粗糙情况；
- ② 溃口各部分的流速分布均匀且溃口的形状和大小固定不变；
- ③ 不考虑重物沉底后的稳定性，认为沉底就稳定即不考虑翻转的情况；
- ④ 重物在水中可能因流速的影响而发生偏转情况，在模型二中加以考虑；
- ⑤ 重物投入水中后，形状、大小、重量未发生变化；
- ⑥ 水流速度始终匀速不变；
- ⑦ 重物从接触水平面到完全被水淹没的过程被视为瞬间过程；
- ⑧ 重物静止从高空投放，即重物未接触水平面时做自由落体运动；
- ⑨ 流水的温度恒定，为常温；
- ⑩ 物体进入水中运动与水流相互影响形成涡流场，情况较复杂，本模型中不考虑；
- ⑪ 不考虑摄像机延迟误差。

四、模型分析与建立

◆问题一：大实心方砖落水后的运动过程模型

§ 4.1.1 问题分析

在本文的模型假设下，结合力学、流体力学及相关参考资料可知，重物落入水中之后，受多种因素影响，从重物自身的质地、形状、大小、重量，到外在的水流速度以及水中是否有障碍物等均可影响重物的运动过程。

为了简化模型及试验的可操作性，本文以附录 1 中各单件试件为例，得出影响重物在水中运动过程的主要因素有以下几点：

- ① 重物重心离水平面的投放高度 h_1 ；
- ② 均匀水流速度 v 的大小；
- ③ 重物的投放方式（如平放、竖放或立放）；
- ④ 重物自身的质地、形状、大小及重量 m, M ；
- ⑤ 水流方式，例如涡流、平流等；
- ⑥ 水流的温度。

§ 4.1.2 模型建立

对重物落入水中之后的运动过程进行受力分析，可知重物除了受到自身的重力，水对重物的浮力及向前的冲力之外，还受到一种水对重物的粘滞阻力。由流体力学知识可知，水是一种流体，当重物投入水中，引起水的变形，而在水的变形过程中，层与层间也存在分子的动量交换，分子间的吸引力就是水对重物存在粘滞阻力的主要原因。由于物体和水流的相互作用，就会产生平行于接触面的切向力，这一切向力就称为粘滞阻力，粘滞阻力的计算，本文需引用如下定理：

牛顿粘滞定律 对给定的流体，设 f 为作用于接触面积 ΔS 的相邻两流层上的粘滞

力，则 f 与垂直于 ΔS 方向上的速度梯度 $\Delta v / \Delta y$ 成正比，与接触面积 ΔS 呈正比，其方向与运动方向相反，即：

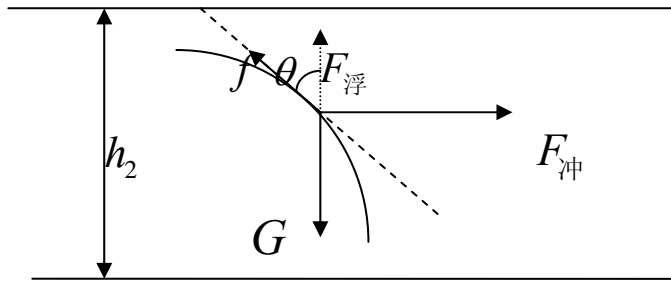
$$f = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} \Delta s \quad (1)$$

其中，粘滞系数 η 由流体本身性质所决定，单位为：帕秒 ($Pa \cdot s$)。

引理 设一个小球在液体中运动，由于粘附在小球表面的液层与邻近的液层产生摩擦，小球受到与运动方向相反的粘滞阻力的作用，若液体的粘滞性较大，小球在运动过程中不产生涡流，则根据斯托克斯定律小球受到的粘滞力为：

$$f = 6\eta\pi r v' \quad (2)$$

其中， r 为小球半径， v' 为小球的运动速度。



图一：重物投入水中的受力分析图

结合重物投入水中后的受力分析图（图一），利用能量守恒及相关流体学知识，把水流对大实心方砖的粘滞阻力进行分解，可得大实心方砖落水后运动过程的数学模型为：

$$\begin{cases} (G - F_{\text{浮}} - f \cos \theta) \cdot h_2 = \frac{1}{2} m (v \cos \theta)^2 - mgh_1 \\ (F_{\text{冲}} - f \sin \theta) \cdot s = \frac{1}{2} m (v \sin \theta)^2 \end{cases} \quad (3)$$

显然，大实心方砖刚接触水平面的初始速度 v 与投放重物的高度 h_1 有关系， h_1 越大， v 也就越大。

§ 4.1.3 模型求解

本文考虑大实心方砖沉底的瞬时状态，把大实心方砖近似看作一个球体，利用 4.1.2

中的引理可计算上式中的各个量为：

$$\begin{cases} G = mg = \rho' g V \\ F_{\text{浮}} = \rho g V \\ f = 6\eta\pi rv \end{cases} \quad (4)$$

这里， r 为大实心方砖的重心到各顶点的距离。当对给定的大实心方砖， h_2 和 S 是可以测量出来的，当水流速度不变时， $F_{\text{冲}}$ 的值与物体和水流的相对速度成正比。利用所给小型试验数据，对该数据进行数据拟合，可得到任意时刻的瞬时速度，利用牛顿粘滞定律，可计算出该模型中的粘滞阻力 f ，从而解方程组可得到 $F_{\text{冲}}$ 的值。

于是，当我们改变重物的物理参数，可得到不同的 S 值，这就为准确向溃口投放重物提供了理论依据。

由于我们的小型试验中是在水中进行，在常温下，我们已知水的粘滞系数 η 为（10℃，1.308；20℃，1.005；30℃，0.801；25℃， 0.839×10^{-3} （Pa·s））。

◆问题二：试件落水后的运动过程模型

§ 4.2.1 问题分析

问题一建立了大实心方砖落水后的运动过程的数学模型，图二所示的是大实心方砖平放时分别在水平方向和竖直方向所受粘滞力的受力图，水流方向如图。

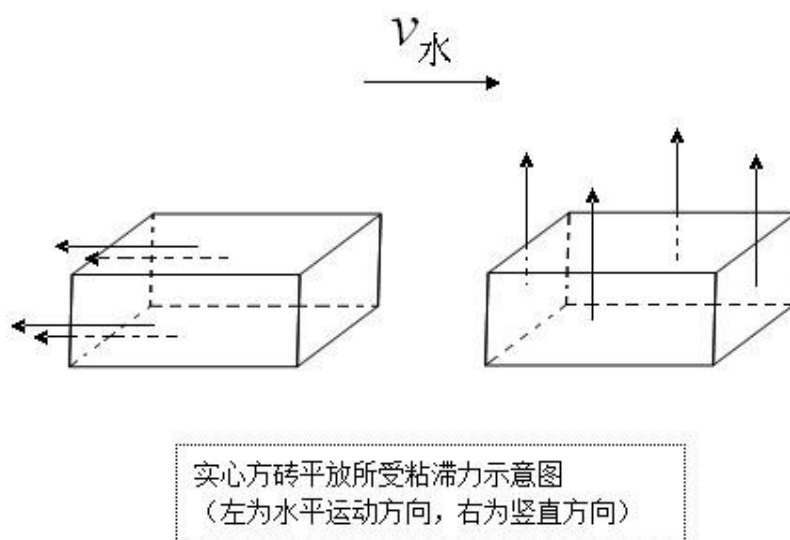
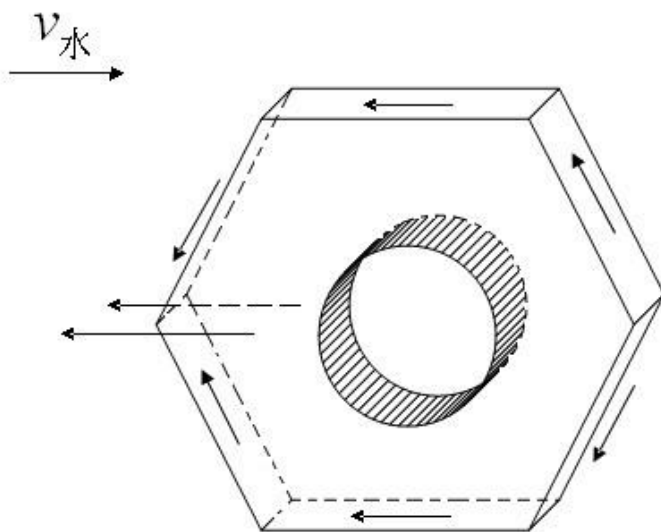


图 二

在此基础上我们对其他类型的重物同样进行分析，同形状大尺寸物体与小尺寸物体受力情况相同；但当形状不同、摆放位置不同时，物体所受到流体的阻力都会发生变化，

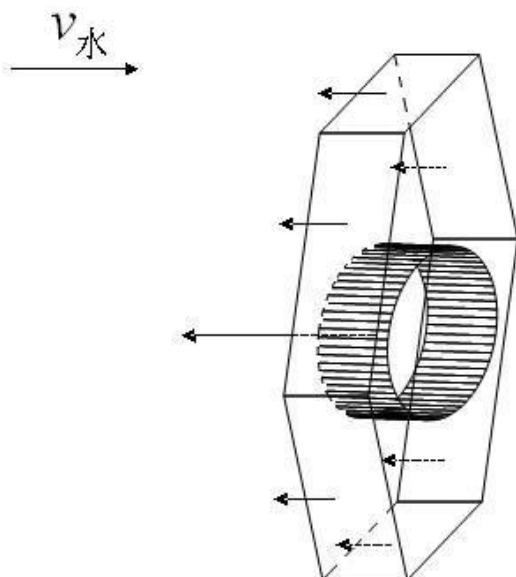
如图三中竖放的空心蜂巢，由于质量较实心的减少，所受重力浮力水的推动力都相应发生改变，在水平方向受到的粘滞力如图所示，其空心部分不受粘滞力；竖直方向受力情况类似。



大空心蜂巢竖放所受粘滞力示意图
(水平运动方向, 竖直运动方向类似)

图 三

但如果是立放的空心蜂巢，其所受的粘滞力情况又有所不同了，如图四中，蜂巢中间空心部分壁面在水平方向也会受到水流的粘滞阻力。同理，空心蜂巢平放时，空心壁面会受到竖直向上的粘滞力，其他相似情形略。



大空心蜂巢立放所受粘滞力示意图
(水平运动方向)

图 四

另外，还有一类重物三角锥。由于三角锥的投放方式是任意的，但只要没有面是垂直于水流方向的，其受粘滞力情形如图五所示。

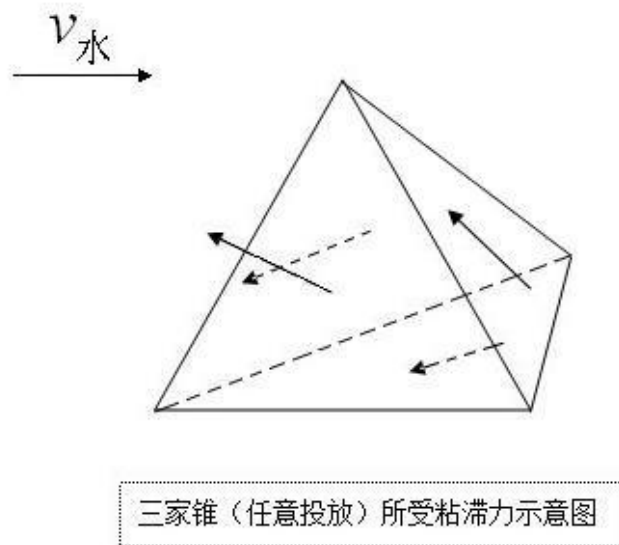


图 五

然而实际中用于封堵溃口的重物千差万别，有实心空心的，也有规则不规则形状的，甚至投放的方式、水流对物体的作用致使物体发生偏转，都直接影响重物在水中下沉的运动状态，从而影响堵口的效果，因此有必要对问题一的模型进行改进，用以研究包含各种因素、能够适应不同情况的物体运动状态。

这里涉及到物体在粘性流体中自由运动问题，是一个复杂的流体力学问题。物体要受到重力，浮力和流体动力的作用，除了平移运动，还会发生旋转运动，在物体的背流区还会产生尾迹漩涡场。物体的运动会扰动周围的流体，从而改变流场分布和物体受到流体动力的分布，进而会影响物体的运动，是一个复杂的流固耦合过程^[1]。

而求解这一问题可利用多重网格虚拟边界有限元法MFBM^[2]即流体流动用多重网格有限元法进行求解，物体可在固定的计算机网格中自由运动，物体可以是任意形状和大小，而且数量不限，只要有足够的计算机内存和足够快的计算速度。更新物体的位置时，只需要在同一个固定网格中重新设定被物体占据区域的网格结点速度即可，无需重新划分网格。物体的位置与速度变化按牛顿—欧拉（Newton—Euler）方程进行计算。把整个包含物流体与物体的区域都作为流体流动区域来处理。

我们要确定一个可以描述考虑到物体边界条件的所有大尺度结构的边界参数。所有物体的精细尺度的特征都隐含处理为内部求解对象，包含在所有插值求解步骤中的所有矩阵和向量的相应分量的未知变量中。多重网格虚拟边界法 MFBM 的主要优点是允许用固定的结构化或非结构化网格覆盖真是物体形状却又独立于真实运动物体进行数值处理。

§ 4. 2. 2 模型建立与求解

正如以上分析，多重网格虚拟边界法（MFBM）所使用的网格不依赖于物体，而是对物体所占据的区域进行特殊处理。在 MFBM 的构架下，不可压流体流动的控制方程为：

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad X \in \Omega_T \quad (5a)$$

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad X \in \Omega \quad (5b)$$

$$\mathbf{u}(X) = \mathbf{U}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) \quad X \in \Omega_i \quad (5c)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是流相的应力张量，可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = -p\mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (6)$$

其中 \mathbf{I} 是单位张量，流体粘性系数 $\mu = \rho \cdot \delta$ ， ρ 是流体密度， δ 是运动粘性系数， \mathbf{X}_i 是物体的质量中心坐标， p 为压力， \mathbf{u} 为速度。令 $\Omega_T = \Omega \cup \Omega_i$ 为整个计算区域，其中 Ω 是流体所占据的区域， Ω_i 是物体所占区域，物体运动方程遵循牛顿—欧拉方程，

即物体的平移速度 \mathbf{U}_i 和角速度 $\boldsymbol{\omega}_i$ 满足方程

$$M_i \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = (\Delta M_i) \mathbf{g} + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}'_i, I_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} + \boldsymbol{\omega}_i \times (I_i \boldsymbol{\omega}_i) = \mathbf{T}_i \quad (7)$$

其中： M_i 表示物体质量； I_i 表示惯性矩张量； ΔM_i 表示 M_i 与占据该物体相同体积的流体质量的质量差； \mathbf{g} 是重力加速度； \mathbf{F}_i 和 \mathbf{T}_i 表示流体作用在物体重心的流体力和力矩，即

$$\mathbf{F}_i = - \int_{\Omega_T} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \alpha_i d\Omega, \quad \mathbf{T}_i = - \int_{\Omega_T} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \alpha_i) d\Omega \quad (8)$$

其中 α_i 定义如下：

$$\alpha_i \{X\} = \begin{cases} 1, & X \in \Omega_i \\ 0, & X \in \overline{\Omega}_i \end{cases} \quad (9)$$

其中 X 表示单元边线中点的坐标值，物体位置坐标 \mathbf{X}_i 和它的角度 θ_i 由运动方程积分得到

$$\frac{dX_i}{dt} = U_i, \quad \frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i. \quad (10)$$

首先用 fractional-step- θ 法对方程中 (5a) 和 (5b) 式进行时间离散。给定 \mathbf{u}^n 和时间步长 $K = t_{n+1} - t_n$ ，然后求解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1}$ 和 $p = p^{n+1}$ 。在 fractional-step- θ 法中，

一个时间步长 $t_n \rightarrow t_{n+1} = t_n + K$ 被分为三个连续的时间分布。在每一个时间步里面，都要求解如下形式的非线性问题：

$$[I + \theta_1 KN(u)]\mu + \theta_2 K \nabla p = f, \quad f := [I - \theta_3 KN(u^n)]\mu^n, \quad \nabla \cdot u = 0. \quad (11)$$

用有限元法进行空间离散。定义函数对 $\{u, p\} \in H := H_0^1(\Omega) \times L := L_0^2(\Omega)$ ，双线性算符 $a(u, v) := (\nabla u, \nabla v)$ 和 $b(p, v) := -(p, \nabla \cdot v)$ ，这样方程 (11) 可以表达成如下形式：

$$\begin{cases} (u, v) + \theta_1 K [va(u, v) + n(u, u, v)] + \theta_2 Kb(p, v) = (f, v), & \forall v \in H \\ b(q, u) = 0, & \forall q \in L \end{cases} \quad (12)$$

其中 $L_0^2(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega)$ 是一般 Lebesgue 和 Sobolev 空间， $n(u, u, v)$ 是一个三线性算符：

$$n(u, v, w) := \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx \quad (13)$$

在整个计算区域 Ω_T 引入四边形有限单元 T_h ，其中 h 是用来表征单元 T_h 最大宽度的参数。选择 \tilde{Q}_1 / Q_0 为单元时，其中用 $\langle x^2 - y^2, x, y, 1 \rangle$ 旋转双线性形状函数来表示单元速度（二维空间），分段的常量来表示单元压力，速度结点值是速度矢量在单元边线或边线中点的平均值，压力结点值是整个单元压力的平均值，从而得到非线性代数方程形式：

$$Su_h + \theta_2 KBp_h = g, \quad B^T u_h = 0, \quad (14)$$

其中矩阵 S 和右边 g 项表示：

$$Su_h = [M + \theta_1 K \tilde{N}(u_h)]\mu_h, \quad g := (\tilde{f}, v_h) = [M - \theta_3 K \tilde{N}(u_h^n)]\mu_h^n, \quad (15)$$

这里 M 是质量矩阵， \tilde{N} 是包含扩散项 va_h 和对流项 \tilde{n}_n 的矩阵， \tilde{n}_n 是包含扩散稳定因子的非线性项， B 是梯度矩阵， $-B^T$ 是转置的散度矩阵，有两种办法[5]可以求解方程 (14)。一种方法是：用固定或牛顿非线性叠代法或通过及时外插的线性化技术处理非线性特性，即可得到能用直接相关法或分裂法对速度和压力分别求解的线性子问题。另一种方法是投影式法：首先将相互关联的问题分解成明确的速度问题 u_h 和压力问题（压力—泊松问题），然后用适当的非线性插值法或线性化技术处理非线性的速度问题。基于后一种方法并结合多重网格法求解方程 (14)。

◆ 问题三：误差分析及模型的合理性

§ 4.3.1 问题分析

针对我们在问题二所提出的数学模型，以小空心蜂巢为例进行误差分析。我们可以得到其落水后的运动过程轨迹，再与小型工况试验录像所得数据做出的散点图进行对比，且以欧式距离 d 表示散点图上的所有点与模型所得运动轨迹上相应点之间的距离之和，显然 d 值越小则说明我们的模型越好。为了进一步描述问题，我们用绝对误差和相对误差的概念来具体刻画，其中：

绝对误差 = | 测量值 - 真实值 | （即测量值与真实值之差的绝对值），

相对误差 = | 测量值 - 真实值 | / 真实值 （即绝对误差所占真实值的百分比）

§ 4.3.2 合理性和结果分析

(-) 单件试件为空心蜂巢, 其投放方式为平放且重物重心在水面的情形时，当水流速度为 0.34m/s 时，模型的模拟轨迹和录像的散点如图六：

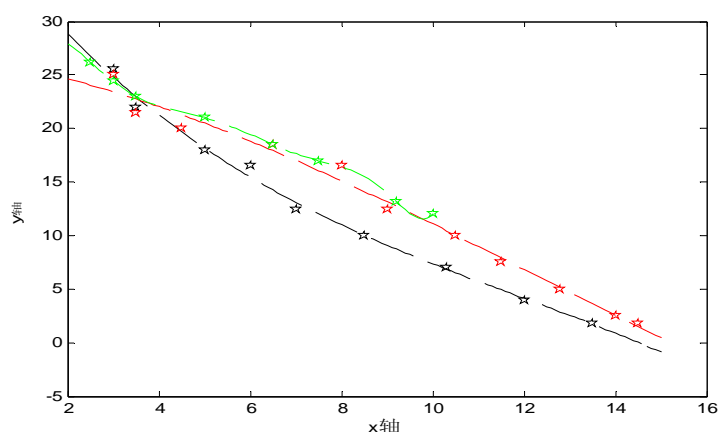


图 六

当水流速度为 0.40m/s 时，模型的模拟轨迹和录像的散点如图七：

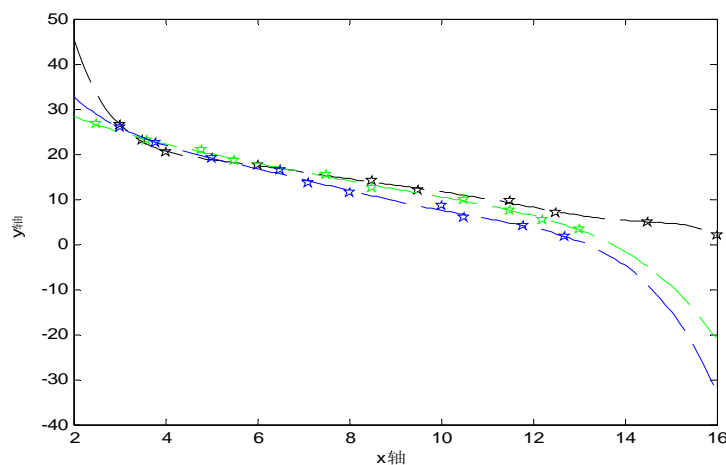


图 七

当水流速度为0.47m/s时，模型的模拟轨迹和录像的散点如图八：

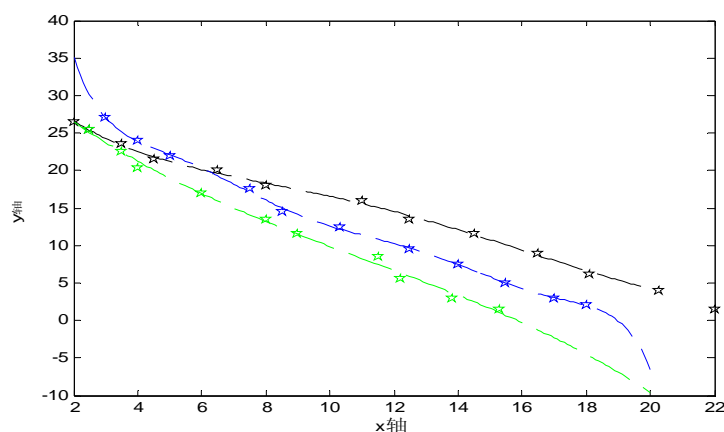


图 八

当水流速度为0.55m/s时，模型的模拟轨迹和录像的散点如图九：

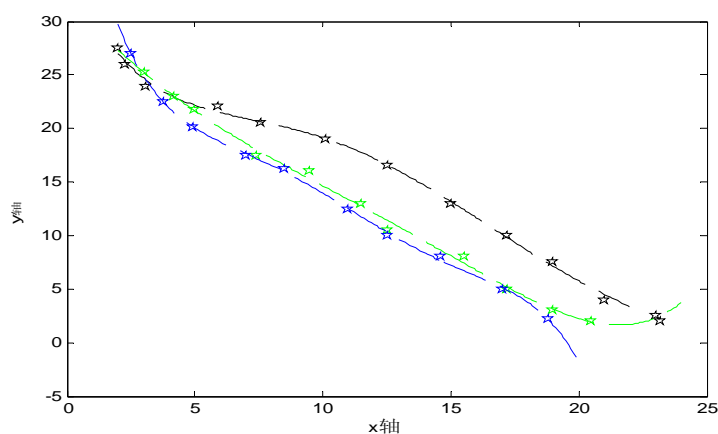


图 九

结果分析：投放方式为平放时，经 MATLAB 计算得到在 4 种不同流速的相对误差分别为 11.53%、13.20%、18.91%、14.75%，我们采取加权平均的方式得到重物平放时相对误差约为 14.59%。

(二) 工况微小空心蜂巢投放方式为竖放且重物重心距离水面 5cm 的情形时，当水流速度为0.34m/s时，模型的模拟轨迹和录像的散点如图十：

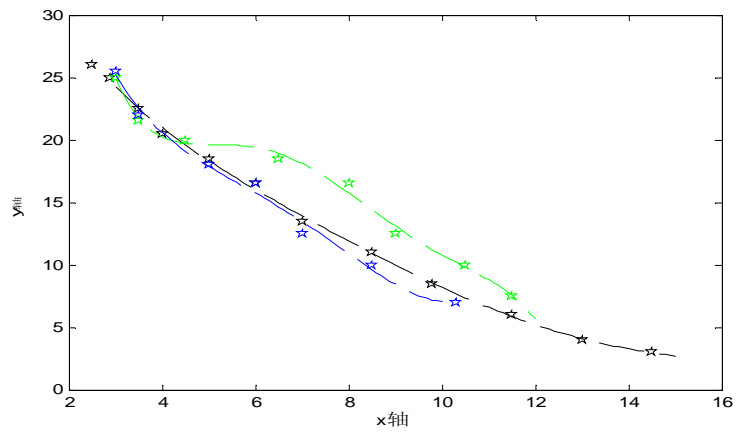


图 十

当水流速度为 0.40m/s 时，模型的模拟轨迹和录像的散点如图十一：

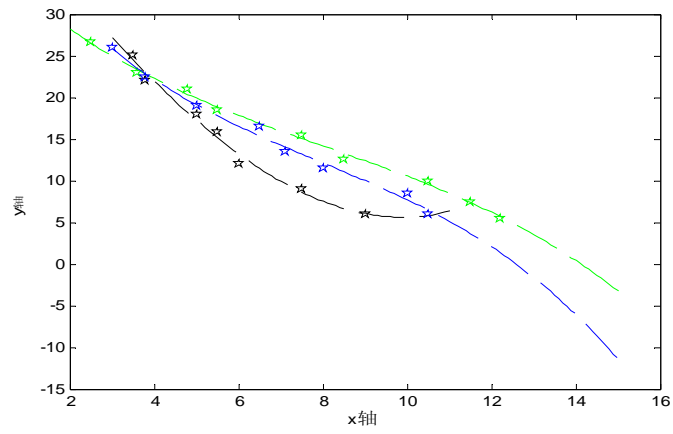


图 十一

当水流速度为 0.47m/s 时，模型的模拟轨迹和录像的散点如图十二：

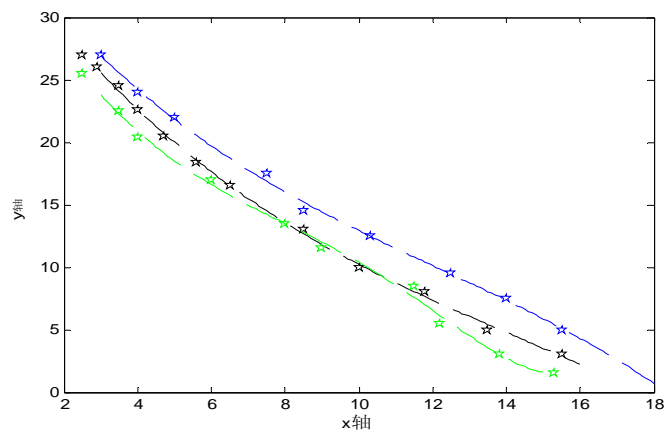


图 十二

当水流速度为 0.55m/s 时，模型的模拟轨迹和录像的散点如图：

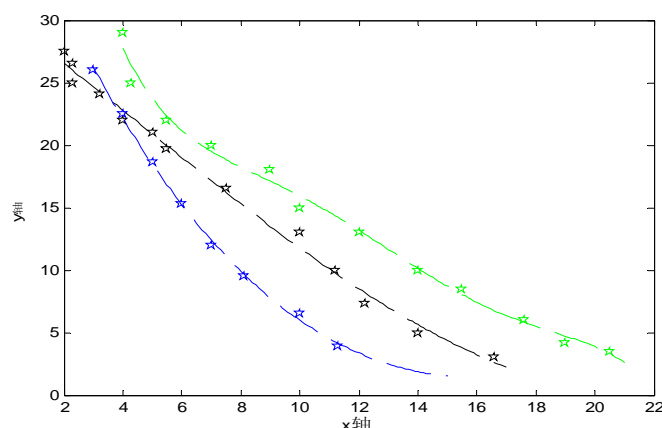


图 十三

结果分析：投放方式为竖放时，经 MATLAB 计算得到在 4 种不同流速的相对误差分别为 15.66%、12.76%、17.43%、14.16%，我们采取加权平均的方式得到重物平放时相对误差为 15.12%。

类似可计算当小空心蜂巢投放方式为立放时，相对误差约为 17.91%。经计算，试件大实心方砖平放、竖放和立放的相对误差分别为 13.7%、10.3%和 20.1%；大三角锥以任意方式投放的相对误差约为 16.67%；其他类型试件类似。

结合问题二我们所建的理论模型和上面得到的相对误差近似值，就可以预测三种不同投放方式下的触底位置，得到我们所需要的最佳理想位置。

◆ 问题四：相似准则与模型应用

§ 4.4.1 相似准则

由于水流运动十分复杂，至今一些水流现象还无法从小型试验中得到。水利学理论研究表明：小型试验的流动与真实情况的流动具有一定的相似性时，小型试验的结果方可用到原型中去。在几何相似的条件下，当两种流动满足运动相似和动力相似，则此流动必相似。流动相似是指在对应点上、对应瞬时，所有的物理量都成比例。要想使流动完全相似是很难办到的，定性准则数越多，小型试验的设计越困难。甚至根本无法进行，为了解决这方面的矛盾，在小型的模型试验中，一般只满足部分相似准则^[3]，即称之为局部相似。这种方法是一种近似的模型试验，它可以抓住问题的主要物理量，忽略对过程影响小的定性准则，可使问题得到简化。

依据附件中流动的力学相似资料，对于本题的小型试验，在模型中我们进行受力分析时发现重力和粘滞力都是重要的作用力，因此这里的相似准则应该选定同时满足雷诺准则和费劳德准则。

§ 4.4.2 运用模型求解真实情况

在把我们所建立的模型运用到实际问题的过程中时，先使用模型求出的小型试验值，再乘以所满足的相似准则中的长度比例尺和速度比例尺算出理论值，最后再依据误

差百分数，得到我们所需的真实有效位置。

由于已经假定溃口的几何形状及水流速度与小型试验相似。按照 4.4.1 中提出的计算方式，我们可以近似算得：

(1) 溃口水深为 3m，溃口流速为 4m/s 时，应提前 2~5m 投放；

(2) 溃口水深为 4m，溃口流速为 5m/s 时，应提前 4~8m 投放；
才能使重物沉底到预定位置。

五、模型优化

本文模型可以用以研究包含各种因素、能够适应不同情况的物体运动状态。但在模型假设中，我们并没有考虑到一些较为复杂的情况，例如重物进入水中运动所产生的涡流场等因素。以下我们对模型进行一些改进，以对流体的运动情况分析为例。

在粘性流体运动中，取下图所示的微元控制体，其控制面由三对微元面积组成。先对控制体应用动量定理，然后得出以应力矢量形式表示的运动方程。

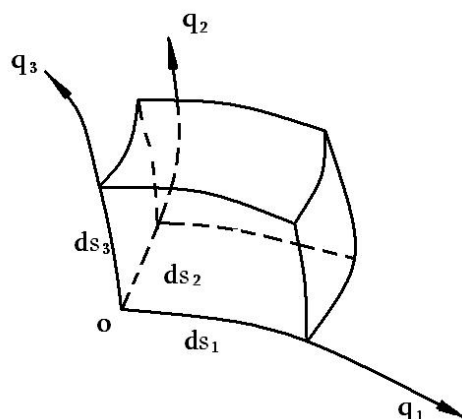


图 十四

动量方程可表述为：控制体内动量的变化是由于质量进出控制面，外界质量力冲量的作用，以及应力面积力冲量的作用。

模型一：利用高等流体力学的相关知识，可建立如下三维立体重物的运动模型：

$$\begin{cases} f_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) = \frac{Du}{Dt} \\ f_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) = \frac{Dv}{Dt} \\ f_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) = \frac{Dw}{Dt} \end{cases}$$

模型二：利用相关微分知识，经过计算化简可得到如下直角坐标系的 N-S 方程：

(1)

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}[(\mu' - \frac{2}{3}\mu)divV] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}[2\mu \frac{\partial u}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y}[\mu(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})] + \frac{\partial}{\partial z}[\mu(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z})]\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}[(\mu' - \frac{2}{3}\mu)divV] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}[\mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})] + \frac{\partial}{\partial y}[2\mu \frac{\partial v}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z}[\mu(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z})]\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}[(\mu' - \frac{2}{3}\mu)divV] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}[\mu(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x})] + \frac{\partial}{\partial y}[\mu(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})] + \frac{\partial}{\partial z}[2\mu \frac{\partial w}{\partial z}]\end{aligned}$$

模型三：由于本文假定水流的温度恒定，设为常温，此时可认为 μ 为常数，从而可建立重物此时的运动模型为：

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du_i}{Dt} &= \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x_i}(divV) + \mu \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \\ &= \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x_i}(divV) + \mu \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j})\end{aligned}$$

参考文献

- [1] Wan DC, Turck S. Direct Numerical Simulation of Particulate Flow via Multigrid FEM Techniques and the Fictitious Boundary Method, International Journal for Numerical Method in Fluids, 2006(51):531-566.
- [2] Turck S. Efficient Solvers for Incompressible Flow Problems. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1999.
- [3] <http://jpkc.zju.edu.cn/k/405/ml.html>
- [4] 费翔麟, 高等流体力学, 陕西: 西安交通大学出版社, 1989.
- [5] 周薇, 流体的粘滞阻力对物体运动的影响, 技术物理教学, 第 17 卷第 2 期: 2009.
- [6] 曹萱龄, 等. 物理学. 上册. 第一版. 北京: 人民教育出版社, 1979, 253、291~296.

附件:

①小空心方体当流速为 0.34m/s、平放且重物重心在水面投放的情形。

%先分别导入数据文件 34 (1) .excel、34 (2) .excel 和 34 (3) .excel 并重新命名为数字矩阵 data1、data2 和 data3。

```
a3=data3(1,:); %提取平放数据的纵坐标。
b3=data3(2,:); %提取平放数据的横坐标。
b13=b3(1:9); %提取其中的有效纵坐标数据
a13=a3(1:9); %提取其中的有效横坐标数据
p3=polyfit(b13,a13,3);
poly2str(p3,'b13');
x3=2:1:15;
y3=polyval(p3,x3);
plot(b13,a13,'kp',x3,y3,'k--'),hold on,
a2=data2(1,:);
b2=data2(2,:);
b12=b2(1:11);
a12=a2(1:11);
p2=polyfit(b12,a12,3);
poly2str(p2,'b12');
x2=2:1:15;
y2=polyval(p2,x2);
plot(b12,a12,'rp',x2,y2,'r--'),hold on,
a1=data1(1,:);
b1=data1(2,:);
b11=b1(1:8);
a11=a1(1:8);
p1=polyfit(b11,a11,8);
poly2str(p1,'b11');
x=2:1:10;
y=polyval(p1,x);
plot(b11,a11,'gp',x,y,'g--') ,xlabel('x 轴'),ylabel('y 轴')
```

②小空心方体当流速为 0.40m/s、平放且重物重心在水面投放的情形。

%先分别导入数据文件 40 (1) .excel、40 (2) .excel 和 40 (3) .excel 并重新命名为矩阵 data1、 data2 和 data3。

```
x=2:1:16; a1=data1(1,:);
b1=data1(2,:);
a11=a1(1:10); %提取其中的有效纵坐标数据
b11=b1(1:10); %提取其中的有效横坐标数据
p1=polyfit(b11,a11,7);
poly2str(p1,'b11');

y=polyval(p1,x);
plot(b11,a11,'kp',x,y,'k--'),hold on, a2=data2(1,:);
```

```

b2=data2(2,:);
a12=a2(1:10);
b12=b2(1:10);p2=polyfit(b12,a12,5);
poly2str(p1,'b12');
x=2:.1:16;
y=polyval(p2,x);
plot(b12,a12,'gp',x,y,'g--'),hold on, a3=data3(1,:);
b3=data3(2,:);
a13=a3(1:10);
b13=b3(1:10);p3=polyfit(b13,a13,5);
poly2str(p1,'b13');
x=2:.1:16;
y=polyval(p3,x);
plot(b13,a13,'bp',x,y,'b--'), xlabel('x 轴'),ylabel('y 轴')

```

③小空心方体当流速为 0.47m/s、平放且重物重心在水面投放的情形。

%先分别导入数据文件 47（1）.excel、47（2）.excel 和 47（3）.excel 并重新命名为矩阵 data1、 data2 和 data3。

```

y=polyval(p1,x);
plot(b11,a11,'kp',x,y,'k--'),hold on, a2=data2(1,:);
b2=data2(2,:);
a12=a2(1:10);
b12=b2(1:10);p2=polyfit(b12,a12,5);
poly2str(p1,'b12');
x=2:.1:16;
y=polyval(p2,x);
plot(b12,a12,'gp',x,y,'g--'),hold on, a3=data3(1,:);
b3=data3(2,:);
a13=a3(1:10);
b13=b3(1:10);p3=polyfit(b13,a13,5);
poly2str(p1,'b13');
x=2:.1:16;
y=polyval(p3,x);
plot(b13,a13,'bp',x,y,'b--'), xlabel('x 轴'),ylabel('y 轴')

```

④小空心方体当流速为 0.55m/s、平放且重物重心在水面投放的情形。

%先分别导入数据文件 55（1）.excel、55（2）.excel 和 55（3）.excel 并重新命名为矩阵 data1、 data2 和 data3。

```

a1=data1(1,:);
b1=data1(2,:);
a11=a1(1:13);
b11=b1(1:13);p1=polyfit(b11,a11,5);
poly2str(p1,'b11');
x=2:.1:22;

```

```

y=polyval(p1,x);
plot(b11,a11,'kp',x,y,'k--'),hold on, a2=data2(1,:);
b2=data2(2,:);
a12=a2(1:11);
b12=b2(1:11);p2=polyfit(b12,a12,5);
poly2str(p1,'b12');
x=2:.1:24;
y=polyval(p2,x);,
plot(b12,a12,'gp',x,y,'g--'),hold on, a3=data3(1,:);
b3=data3(2,:);
a13=a3(1:10);
b13=b3(1:10);p3=polyfit(b13,a13,5);
poly2str(p1,'b13');
x=2:.1:20;
y=polyval(p3,x);,
plot(b13,a13,'bp',x,y,'b--'),xlabel('x 轴'),ylabel('y 轴')

```

⑤小空心方体当流速为 0.34m/s、竖放且重物重心距离水面 5cm 的情形。

%先分别导入数据文件 34（1）.excel、34（2）.excel 和 34（3）.excel 并重新命名为矩阵 data1、 data2 和 data3。

```

a1=data1(3,:); %提取竖放数据的纵坐标。
b1=data1(4,:); %提取其中的有效横坐标数据
a11=a1(1:12); %提取其中的有效纵坐标数据
b11=b1(1:12); %提取其中的有效横坐标数据
p1=polyfit(b11,a11,5);
poly2str(p1,'b11');
x=3:.1:15;
y=polyval(p1,x);
plot(b11,a11,'kp',x,y,'k--'),hold on, a2=data2(1,:);
b2=data2(2,:);
a12=a2(1:8);
b12=b2(1:8);p2=polyfit(b12,a12,5);
poly2str(p1,'b12');
x=3:.1:12;
y=polyval(p2,x);,
plot(b12,a12,'gp',x,y,'g--'),hold on, a3=data3(1,:);
b3=data3(2,:);
a13=a3(1:7);
b13=b3(1:7);p3=polyfit(b13,a13,4);
poly2str(p1,'b13');
x=3:.1:10;
y=polyval(p3,x);,
plot(b13,a13,'bp',x,y,'b--'),xlabel('x 轴') , ylabel('y 轴')

```

⑥小空心方体当流速为 0.40m/s、竖放且重物重心距离水面 5cm 的情形。

%先分别导入数据文件 40（1）.excel、40（2）.excel 和 40（3）.excel 并重新命名为矩阵 data1、 data2 和 data3。

```
a1=data1(3,:); %提取竖放数据的纵坐标。
b1=data1(4,:); %提取其中的有效横坐标数据
a11=a1(1:7); %提取其中的有效纵坐标数据
b11=b1(1:7); %提取其中的有效横坐标数据
p1=polyfit(b11,a11,3);
poly2str(p1,'b11');
x=3:.1:11;
y=polyval(p1,x);
plot(b11,a11,'kp',x,y,'k--'),hold on, a2=data2(1,:);
b2=data2(2,:);
a12=a2(1:9);
b12=b2(1:9);p2=polyfit(b12,a12,3);
poly2str(p1,'b12');
x=2:.1:15;
y=polyval(p2,x);,
plot(b12,a12,'gp',x,y,'g--'),hold on, a3=data3(1,:);
b3=data3(2,:);
a13=a3(1:8);
b13=b3(1:8);p3=polyfit(b13,a13,3);
poly2str(p1,'b13');
x=3:.1:15;
y=polyval(p3,x);,
plot(b13,a13,'bp',x,y,'b--'),xlabel('x 轴'),ylabel('y 轴')
```

⑦小空心方体当流速为 0.47m/s、竖放且重物重心距离水面 5cm 的情形。

%先分别导入数据文件 47（1）.excel、47（2）.excel 和 47（3）.excel 并重新命名为矩阵 data1、 data2 和 data3。

```
a1=data1(3,:); %提取竖放数据的纵坐标。
b1=data1(4,:); %提取其中的有效横坐标数据
a11=a1(1:12); %提取其中的有效纵坐标数据
b11=b1(1:12); %提取其中的有效横坐标数据
p1=polyfit(b11,a11,3);
poly2str(p1,'b11');
x=3:.1:16;
y=polyval(p1,x);
plot(b11,a11,'kp',x,y,'k--'),hold on, a2=data2(1,:);
b2=data2(2,:);
a12=a2(1:10);
b12=b2(1:10);p2=polyfit(b12,a12,5);
poly2str(p1,'b12');
x=3:.1:15;
```

```

y=polyval(p2,x);
plot(b12,a12,'gp',x,y,'g--'),hold on, a3=data3(1,:);
b3=data3(2,:);
a13=a3(1:9);
b13=b3(1:9);p3=polyfit(b13,a13,3);
poly2str(p1,'b13');
x=3:.1:18;
y=polyval(p3,x);
plot(b13,a13,'bp',x,y,'b--'),xlabel('x 轴'),ylabel('y 轴')

```

⑧小空心方体当流速为 0.55m/s、竖放且重物重心距离水面 5cm 的情形。

%先分别导入数据文件 55（1）.excel、55（2）.excel 和 55（3）.excel 并重新命名为矩阵 data1、 data2 和 data3。

```

a1=data1(3,:); %提取竖放数据的纵坐标。
b1=data1(4,:); %提取其中的有效横坐标数据
a11=a1(1:13); %提取其中的有效纵坐标数据
b11=b1(1:13); %提取其中的有效横坐标数据
p1=polyfit(b11,a11,3);
poly2str(p1,'b11');
x=2:.1:17;
y=polyval(p1,x);
plot(b11,a11,'kp',x,y,'k--'),hold on, a2=data2(3,:);
b2=data2(4,:);
a12=a2(1:12);
b12=b2(1:12);p2=polyfit(b12,a12,5);
poly2str(p1,'b12');
x=4:.1:21;
y=polyval(p2,x);
plot(b12,a12,'gp',x,y,'g--'),hold on, a3=data3(3,:);
b3=data3(4,:);
a13=a3(1:8);
b13=b3(1:8);p3=polyfit(b13,a13,3);
poly2str(p1,'b13');
x=3:.1:15;
y=polyval(p3,x);
xlabel('x 轴'),ylabel('y 轴')
plot(b13,a13,'bp',x,y,'b--')

```