

卫星和飞船的跟踪测控

戴红兵, 梁海鹏

(思茅师范高等专科学校数学系, 云南 普洱 665000)

[摘要] 本文是针对卫星和飞船的跟踪测控而建立的数学模型。在问题 1 中, 建立了地心张角与监控器张角及飞船高度关系模型、估算法模型、对椭圆实际监控的迭代算法模型, 并以神舟六号飞船为例算出建站个数。在问题 2 中, 建立了监控器斜穿飞船轨道下方时, 地心张角与监控器在地球自转情况下的实际监测张角关系及建站模型, 并以神舟六号飞船为例算出建站个数。在问题 3 中, 分析了各监控站在飞船升空监控的阶段及范围。

[关键词] 椭圆轨道; 地球自转; 测控; 迭代算法

[中图分类号] O29 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1008-8059(2009)06-0028-05

卫星和飞船在国民经济和国防建设中有着重要的作用, 它与人们日常生活密切联系, 如卫视节目、天气预报、环境监测等等, 而对它们的发射和运行过程进行测控是航天系统的一个重要组成部分, 如何对卫星和飞船(特别是载人飞船)在椭圆轨道上进行全程跟踪测控是一个非常棘手的问题, 本文用迭代算法模型很好得解决了这一问题, 并建立了卫星和飞船轨道与赤道存在固定夹角且受地球自转影响下实际监控模型。

1 问题的提出

卫星和飞船在国民经济和国防建设中有着重要的作用, 对它们的发射和运行过程进行测控是航天系统的一个重要组成部分, 理想的状况是对卫星和飞船(特别是载人飞船)进行全程跟踪测控。

测控设备只能观测到所在点切平面以上的空域, 且在与地平面夹角 3 度范围内测控效果不好, 实际上每个测控站的测控范围只考虑与地平面夹角 3 度以上的空域。

利用模型分析卫星或飞船的测控情况, 具体

问题如下:

(1) 在所有测控站都与卫星或飞船的运行轨道共面的情况下至少应该建立多少个测控站才能对其进行全程跟踪测控?

(2) 如果一个卫星或飞船的运行轨道与地球赤道平面有固定的夹角, 且在离地面高度为 H 的球面 S 上运行。考虑到地球自转时该卫星或飞船在运行过程中相继两圈的经度有一些差异, 问至少应该建立多少个测控站才能对该卫星或飞船可能飞行的区域全部覆盖以达到全程跟踪测控的目的?

(3) 收集我国一个卫星或飞船的运行资料和发射时测控站点的分布信息, 分析这些测控站点对该卫星所能测控的范围。

关于模型的假设放在各个问题中处理。

2 问题的解决

2.1 在所有测控站都与卫星或飞船的运行轨道共面的情况下至少应该建立多少个测控站才能对其进行全程跟踪测控?

① [收稿日期] 2009-09-21

[作者简介] 戴红兵(1966~), 男, 湖南祁东人, 思茅师范高等专科学校数学系副教授, 主要从事数学分析及建模教学研究;
梁海鹏(1980~), 男, 河北井陉人, 思茅师范高等专科学校数学系助教, 主要从事图论及最优化研究。

设飞船轨道的近地点为 s_1 , 远地点为 s_2 , 飞船轨道是椭圆, 取椭圆近地点旁边的焦点为地球的球心 (如图 1 所示)。

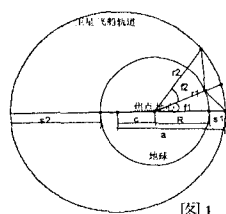


图1

2.1.1 估算法

由于椭圆轨道测控定位很麻烦, 因此先估算, 然后再用精算。

(1) 以地心为圆心, 地球半径与近地点之和为半径作圆 (如图 2)。由于圆包含在椭圆区域内, 若能监控到圆周及其以外空域, 则一定能监控到椭圆及以外空域, 因此, 在地球上均匀建站监控整个圆周。其算法为:

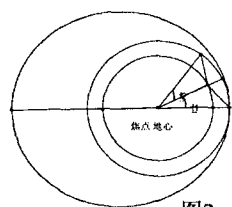


图2

$\frac{\sin 93^\circ}{R+h} = \frac{\sin G}{R}$,
 $f_1 = f_2$, 其中 f_1, f_2 是如图所示的圆心角, $q = \arcsin \frac{R \sin 93^\circ}{R+h}$, $f_1 = \pi - 93^\circ /$

$\pi 1890^\circ - q, n = \pi / f_1$ 。

模型:

$$f_1 = \pi(1 - 93^\circ/180^\circ) - \arcsin \frac{R \sin 93^\circ}{R+h} \quad (1),$$

$$n = \frac{\pi}{f_1} \quad (2)。$$

现以神舟六号飞船为例, 其近地点

$s_1 = 200 \text{ km}$, 令 $h = s_1, n = 16$ (个)。

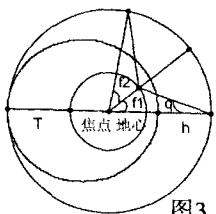


图3

(2) 以地心为圆心, 地球半径与远地点之和为半径作圆 (如图 3)。由于大圆包含了椭圆区域, 因此, 只监控到大圆周及其以外空域, 则未必能监控整个椭圆周。在地球上均匀建站监控整个圆周。其算法与 2.1.1.1 中相同: $h = s_2$, 以神舟六号飞船为例, 其远地点 $s_2 = 347 \text{ km}$, 令 $h = s_2, n = 12$ (个)。

(3) 结论。椭圆轨道上的监测站应该在 12 至 16 个之间。

2.1.2 椭圆轨道的监控算法

(1) 椭圆轨道的监控算法思想

用逼近方法和迭代算法来实现。由于对椭圆监控不能像对待圆一样均匀布站, 而 $f_1 \neq f_2$, 因此, 布站是一件非常棘手的事。当然 f_1 可用 2.1.

1 中模型算法, f_2 能不能借用 f_1 的算法呢? 仔细观察图 1 会发现: 若 f_2 右侧的向径 r_1 能求出来, 则可借用 f_1 的算法来算出 f_2 的近似值。根据物理学、力学知识及开普勒三大定律可得到 $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f}$ (3), a 为椭圆的长半轴, e 为离心率, f 为向径与椭圆水平长轴的夹角, r 为球心到椭圆上的向径。 $a = \frac{s_1 + s_2 + 2R}{2}$, $c = a - s_1 - R$, $e = c/a$, 已知 $r_0 = s_1$, 由 (1) 式可求出 f_1 , 在由 (3) 式可求出 r_1 , 再由 (1) 式可求出 f_2 , 在由 (3) 式可求出 r_2 , ... 如此循环反复。

椭圆轨道的监控算法模型:

$$r_0 = R + s_1, f_1 = \pi(1 - 93^\circ/180^\circ) - \arcsin$$

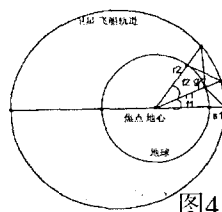


图4

$$\frac{R \sin 93^\circ}{r_{i-1}} \quad (4), \quad r_i$$

$$\frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \sum_{k=1}^i f_k} \quad (5)。$$

若 $r_0 = R + 200 \text{ km}$, 则由 (4) 可算出 $f_i = 0.20036$ (弧度), 用 (5) 算出 $r_1 = 6572.437 \text{ km}$, 在用 (4) 算出 f_2 的近似值 $f_2 = 0.20124042$ (弧度)。用此逼近方法的近似程度怎样呢?

$$g = \arcsin \frac{r_2 \sin f_2}{\sqrt{r_2^2 + R^2 - 2r_2 R \cos f_2}}, g = 93.18^\circ \text{ 或}$$

$g = 86.82^\circ$, 那么应取哪个值呢? 取 $f'_2 = \frac{1}{2}f_1$, 算得 $g' = 75.48^\circ, g' = 104.52^\circ$ 或, 由于 $f_2 > f'_2, g < g'$, 又由图 4 中 $r_2 > r_1$, 可断定 f 变大 g 变小, f 变小 g 变大, 因此 $g = 93.18^\circ$, 该站左侧的张角与额定的张角只相差 0.18° , 这样的近似程度非常好。

下面数据是用 (4)、(5) 中的模型及用 Excel 电子文档计算得到的。

表中的最后一列 f 是各站对应圆心之张角的和。 $r_1 < 6371 + 347 = 3718 \text{ (km)}$ 。

(一) 序号 27 的最后一个数据 6.351812 (弧度) 是 27 个半张角的和, 它大于 2π , 因此, 监控一周有余, 共需 14 个站。

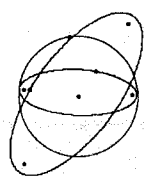
(二) 序号 14 的最后一个数据 3.282636 (弧度) 是 14 个半张角的和, 它大于 π , 因此, 监控半周有余, 则一周共需 14 个站。

上述 (一)、(二) 算法思想一致, 但 (一) 按表中数据依次布站, 而 (二) 则按上半球与下半球的对称位置各布 7 个站。

	s1	s2	c	e
	200	347	73.5	0.011062
	a			
	6644.5			
序号	r0	r1	f1	f
1	6571	6572.43716	0.200366	0.200366
2	6572.437	6576.722923	0.201211	0.401577
3	6576.723	6583.796174	0.203714	0.605291
4	6583.796	6593.559052	0.207785	0.813076
5	6593.559	6605.83981	0.213291	1.026367
6	6605.84	6620.344986	0.22004	1.246407
7	6620.345	6636.605231	0.227777	1.474184
8	6636.605	6653.925866	0.23617	1.710354
9	6653.926	6671.359724	0.244815	1.955169
10	6671.36	6687.724947	0.253232	2.208401
11	6687.725	6701.688986	0.260896	2.469297
12	6701.689	6711.92696	0.267266	2.736563
13	6711.927	6717.336014	0.271843	3.008406
14	6717.336	6717.255329	0.274231	3.282636
15	6717.255	6711.621629	0.274195	3.556832
16	6711.622	6701.000476	0.271708	3.828539
17	6701	6686.476495	0.266955	4.095495
18	6686.476	6669.440166	0.260319	4.355814
19	6669.44	6651.343953	0.252319	4.608132
20	6651.344	6633.499047	0.243544	4.851677
21	6633.499	6616.953536	0.234588	5.086265
22	6616.954	6602.455591	0.22599	5.312255
23	6602.456	6590.479895	0.218199	5.530454
24	6590.48	6581.287416	0.211568	5.742022
25	6581.287	6574.993077	0.206349	5.948372
26	6574.993	6571.625035	0.202707	6.151079
27	6571.625	6571.167776	0.200734	6.351812

(2) 飞船升空阶段

据有关资料飞船起初垂直发射 200m, 尔后逐渐降低倾斜角, 入轨时倾角为 42.4° , 其轨迹为先陡峭后逐步放缓的抛物线, 飞船入轨高度 200km, 水平距离约 700km, 入轨速度 7.812km/s。过发射点作地球的切线为水平线, 连接发射点与入轨点, 则该线的倾斜角为 q



$= \arctan \frac{200}{700}$, $q = 16^\circ$, $q > 3^\circ$, 因此在
这种前提条件下, 只需在发射点建 1
个站就可监控飞船升空阶段。

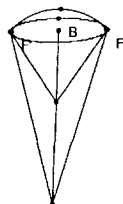
(3) 结论。若神舟六号飞船近地点 $s_1 =$

200km, 远地点 $s_2 = 347km$, 则监控一周, 共需 14 个站。椭圆轨道的监控算法模型(4)、(5)近似程度非常好。

2.2 如果一个卫星或飞船的运行轨道与地球赤道平面有固定的夹角, 且在离地面高度为 H 的球面 S 上运行。考虑到地球自转时该卫星或飞船在运行过程中相继两圈的经度有一些差异, 问至少应该建立多少个测控站才能对该卫星或飞船可能飞行的区域全部覆盖以达到全程跟踪测控的目的?

2.2.1 飞船轨道及地球自转等相关描述

(一)由于监控设备随地球一起自转,其运动方向是固定在同一纬线上做圆周运动,且飞船轨道面与赤道面存在固定的夹角 ϕ ,因此,监控器是斜着穿过轨道下方。(二)因为地球是圆的,监控器在绝大部分位置上视线被地球自身挡住而不能监控到轨道,它只能沿纬线转动到相应的位置才能监控前方轨道。(三)监控器的视角是圆锥体型,于是把监控某段轨道的情形放置在监控视角圆锥体内的两个相互垂直的剖平面图上处理问题。这两个平面,一个是反映视角宽度,另一个是反映视角高度,它们都同时受到地球自转的影响。由于两图的结构一样,只是它们相互垂直而已,应该有 $p=q$,且视角宽度与视角高度应该相等。



2.2.2 建模

由于监控器是斜着穿过轨道下方,于是其正视角宽(高)度投影到斜面上所对应的圆心角

为 $2psin\phi$,而视角高(宽)度受到地球自转的影响,因此,受监控的轨道所对应张角 β ,

模型:

$$\beta = (2p - vt) \sin\phi \quad (6),$$

v 为地球自转角速度,

$$v = 2\pi / (24 \times 3600) = 7.27221 \times 10^{-5}$$

(弧度/秒), p 可用 2.1.1 中模型(1)求出, t 为飞船在一个监控段所用的时间,一圈用 5400 秒,一

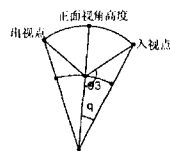
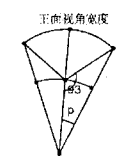
共布设 n 个站, $n = \frac{\pi}{psin\phi}$, $t = 5400 / (\frac{\pi}{psin\phi})$ (秒),

$$\text{即 } t = 5400psin\phi / \pi \text{ (秒)} \quad (7).$$

$$\text{一共需设站: } N = \frac{2\pi}{\beta} \text{ (个)}$$

若神舟六号飞船在 343km 高度运行时, $\phi = \pi/3$, $t = 406.03$ 秒,

$\beta = 0.4468667545$ 弧度, $N = 14.061 < 15$ (个站)。



		弧角 p		半圆心角	圆心角
0.272762107	15.62811781	31.25623562	11.51770176	343	
v	ϕ	t	β	N	
0.000072721	1.047197533	406.0304069	0.446866745	14.061	

2.2.3 结论

神舟六号飞船在 343km 高度运行时, $\phi = \pi/3$,需 15 个站,挫位排列,分弧段接力监控。

2.3 收集我国一个卫星或飞船的运行资料和发射时测控站点的分布信息,分析这些测控站点对该卫星所能测控的范围。

航天测控与通信系统是在飞船点火发射后,负责飞船从发射、运行到最终返回的全程测量与遥控,是飞船升空后和地面唯一的联系途径。载人航天测控通信系统分五个测控阶段,由 11 站 6 船组成,它们是主场站、喀什站、和田站、东风站、青岛站、渭南站、厦门站、纳米比亚站、马林迪站、卡拉奇站、圣地亚哥站、远望一、远望二、远望三、远望四、远望五、远望六号。(一)上升阶段由主场站、喀什站、东风站、青岛站、渭南站、厦门站负责火箭飞船升空的上升阶段的航道测量。它们还要对飞船入轨一分钟之后运行段进行监测;(二)入轨段的监控主要由远望一、远望二号负责,当飞船入轨后,远望一号就以接上飞船的位置,在之后的五至六分钟,地面可观察飞船的飞行姿态,入轨高度。入轨二十分钟后,远望二号会进一步跟踪

判断,入轨运行情况是否正常;(三)运行段的监控由所有的陆地站监控,有时还需加测量船远望四号;(四)返回段测控站由远望三、卡拉奇站纳米比亚站组成,负责飞船返回地球的姿态调整、分离和制动。(五)返回舱分离测控站由卡拉奇站、喀什站、和田站组成,主要负责飞船再入大气层后的监控和监察人的状况。这些航天测控站由三个中心负责运作,其中东风指挥中心,负责上升段从发射到入轨的测控;北京指挥中心,负责运行段和返回段;西安卫星测控中心,它既是卫星测控用的中心,又是承担飞船测控的中心。如神州七号飞船发射和运行过程中测控站的分布如图所示:



图片来源 http://www.gov.cn/jrzg/2008-09/24/content_1104882.htm

附表. 轨道高度与张角关系的数据表

弧角	半圆心角	圆心角	站数个	h 高度 km
0.083000746	4.755592526	9.511185052	37.85017304	50
0.131219214	7.518307264	15.03661453	23.94155941	100
0.168734975	9.667802068	19.33560414	18.61850281	150
0.200367849	11.48023228	22.96046456	15.67912527	200
0.228122107	13.07043416	26.14086833	13.77153947	250
0.253062955	14.49943949	28.99887899	12.41427299	300
0.275837852	15.80434501	31.60869002	11.38927301	350
0.272762107	15.62811781	31.25623562	11.51770176	343
0.296875772	17.00972908	34.01945816	10.58217913	400
0.31647864	18.13289068	36.26578135	9.926712912	450
0.33486871	19.18656409	38.37312818	9.381565098	500
0.352215366	20.18045429	40.36090858	8.919521702	550
0.368651316	21.12216489	42.24432978	8.521853746	600
0.476964922	27.3280775	54.65615499	6.586632375	1000
0.577148069	33.06814905	66.13629811	5.443304362	1500
0.65506718	37.53258532	75.06517065	4.7958327	2000
0.200367849	11.48023228	22.96046456	15.67912527	200
0.274523877	15.72905977	31.45811955	11.44378638	347

[参考文献]

[1] 姜启源. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.

[2] 姜启源, 谢金星. 数学建模案例选集[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[3] 刘来福, 曾文艺. 数学模型与数学建模

[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1997.

[4] 史可信. 力学[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[5] 杨维铤. 力学与理论力学[M]. 北京: 科学出版社, 2008.