第 20 卷 第 7 期
2003 年 12 月

工 程 数 学 学 报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 20 No. 7
Dec. 2003

文章编号:1005-3085(2003)07-0101-07

江河竞渡的优化模型

尹立伟， 李志波， 刘中亮
指导教师： 崔国生
(沈阳工程学院,沈阳 110036)

编者按:本文摘要简洁明了地概述了作者的建模方法和结果。作者在速度分解的基础上,在流速为分段常数的情形下,假设游泳者的游泳角度分段不变,建立了数学模型,并用来求解或近似求解竞赛试题要求解答的各个问题,得到了正确的结果。本文叙述清晰易懂,缺点之一是没有在各种情形下说明游泳者的速度至少多大才能游到终点的表达式。

摘 要:首先建立了江水流速恒定不变的模型 I ,得出了 2002 年冠军选手的行进路线为连接起点与终点的直线,其速度大小约为 1.54 米/秒,方向为垂直对岸左偏 27.5°;近似求出了速度为 1.5 米/秒的选手的前进方向应左偏 31.9°,他的最好成绩约为 15 分 10 秒;根据此模型,得出了 1934 年和 2002 年成功完成赛事的最低速度及可以选择的前进角度,较好地解释了两次比赛成功者比例相差悬殊的原因,进而得出了能够垂直游向对岸的条件为 $v \geq \frac{uY}{X}$。

在模型 I 的基础上,建立了江水速度分段变化的模型 II ,回答了题目的问题 3——选手的前进方向为靠近两岸 200 米之内时,左偏 36.1°,在江心区域左偏 28.1°;它的最好成绩大约为 15 分 4 秒。

进一步,我们又完成了江水流速按区域连续变化的模型 III 和模型 IV ,并用离散的方法求解了该模型。根据运算结果,为选手提供了在垂直距离上每前行 100 米所应调整的角度,求得最优路径为一“反 S”型;得出了“两侧偏角大,中间偏角小”的行进方向基本原理。

关键词:抢渡长江;数学模型;最优化;速度
分类号:AMS(2000) 49N99 中图分类号:O224 文献标识码:A

1 问题重述(略)

2 主要变量及其符号

v :游泳者的平均游泳速度(速率);

u :水流速度(速率);

X :起点在对岸的投影点到终点的距离;

Y :两岸间的垂直距离;

Y_i :河流垂直岸边方向第 i 段的宽度;

u_i :水流在第 i 段的速度(速率);

θ_i :游至垂直岸边方向第 i 段时,与垂直岸边方向左偏角度;

t_i :游泳者游经第 i 段所需时间;

t :游泳者从起点到终点所需的总时间;

λ :将江面宽度平均分成 n 份,每份的长度。

3 模型建立与求解

3.1 模型Ⅰ(水流恒速模型)

模型假设

1) 在游泳过程中,游泳者的速度可以保持恒定不变;

2) 竞渡区域内各点水流速度相同;

3) 江面宽度保持不变,即两岸是保持平行的;

4) 游泳过程中游泳者之间互不影响。

模型建立与求解

若游泳者的游泳速度为 v ,则垂直于对岸的分速度 $v_1 = v\cos\theta$,平行于两岸方向的分速度 $v_2 = -v\sin\theta$ 。于是游泳者沿平行于水流方向的合速度 $V = u - v\sin\theta$ 。

因为江面宽度为 Y ,假设游泳者游进方向不变,则游泳者游到对岸所需时间为

$$t_1 = \frac{Y}{v\cos\theta} \tag{1}$$

游泳者平行于两岸前进的距离为

$$L = t_1(u - v\sin\theta) \tag{2}$$

此时游泳者与终点的距离为 $L' = X - L$ 。若 $L' < 0$,则游泳者将无法到达终点而被冲到下游;若 $L' \geqslant 0$,则游泳者可以到达终点。

问题1求解

将 $X = 1000$, $Y = 1160$, $u = 1.89$ 代入式(1)、式(2)。因为游泳者的速度和江水速度均保持不变,故2002年第一名的理想路径应该是沿着起点与终点的连线(直线)前进的。因为沿江方向与垂直方向游泳时间相同,故

$$\begin{cases} \dfrac{1160}{v\cos\theta} = 848 \\ \dfrac{1000}{1.89 - v\sin\theta} = 848 \end{cases}$$

用Mathemtica4软件解得 $v = 1.54$, $\theta = 27.5°$,即获得第一名的选手是以1.54米/秒的速度,以 $\theta = 27.5°$的角度进行游泳的。

在江水流速恒定为 u 的情况下,若某一选手的游泳速度可以恒定保持为 v ,则其理想游泳角度(左偏角)

$$\theta^* = \arctan\frac{Y}{X} - \arccos\left(\frac{uY}{v\sqrt{X^2 + Y^2}}\right) \tag{3}$$

若游泳者的速度以1.5米/秒保持不变,则根据模型可建立方程

$$\frac{1160}{1.5\cos\theta} - \frac{1000}{1.89 - 1.5\sin\theta} = 0$$

由 Mathemtica4 软件解得 $\theta=31.9°$, $t=910.5$(秒)≈15 分 10 秒,即游泳者保持以 $\theta=31.9°$的角度进行游泳,便可获得(理论上的)最好成绩,时间大约为 15 分 10 秒。

问题 2 的求解

在模型Ⅰ的假设下,如果游泳者始终沿垂直岸边的方向行进,则能够达到终点速度 v 所应满足的条件为

$$\frac{Y}{v}-\frac{X}{u}\leq 0$$

即

$$v\geq\frac{Y}{X}u \tag{4}$$

将 $Y=1600$, $X=1000$, $u=1.89$ 代入式(4),得 $v\geq 2.1924$,即只有速度达到 2.19 米/秒以上时,选手方能一直沿垂直岸边的方向成功游到对岸。而绝大多数选手的速度达不到或不能保持 2.19 米/秒的水平,因而一直垂直游向对岸不能成功到达终点。

2002 年和 1934 年抢渡比赛成功率的显著差别,可以用模型Ⅰ较好地解释:

(1) 从速度要求来比较

针对 2002 年,若游泳者最终游出的轨迹为直线,则

$$\frac{v\cos}{1.89-v\sin\theta}=\frac{1160}{1000}$$

解得

$$v=\frac{5481}{2500\cos\theta+2900\sin\theta}$$

容易求得此时 v 的最小值为 1.44(米/秒)。

同理,针对 1934 年有

$$v=\frac{10962}{24315\cos\theta+5800\sin\theta}$$

求得此时 v 的最小值为 0.44(米/秒)。

两次竞渡对速度的要求 2002 年要明显高于 1934 年,因此成功者的比例自然会明显降低。对速度的不同要求,是导致两次比赛到达终点者比例不同的一个主要原因。

(2)从可选择的游泳角度(θ 的取值范围)来比较

表 1 和表 2 分别是利用依据求出的 2002 年和 1934 年不同速度水平下可以到达终点的 θ 的取值范围。

表 1　2002 年角度界限

速度(米/秒)	θ 下界(度)	θ 上界(度)	θ 上、下界差(度)
1.45	40.1	58.1	18.0
1.50	31.9	66.6	34.7
1.55	26.7	71.8	45.1
1.60	22.7	75.8	53.1

表 2　1934 年角度界限

速度(米/秒)	θ 下界(度)	θ 上界(度)	θ 上、下界差(度)
1.45	-58.9	85.8	144.7
1.50	-59.6	86.4	146.0
1.55	-60.2	86.9	147.1
1.60	-60.7	87.5	148.2

由两表对比可以看出,2002 年达到终点的角度变化范围大约在 20～50 度之间,而 1934 年达到终点的角度变化范围大约在 140 度以上,这一巨大差别是导致两次抢渡选手成功到达终点比例差距很大的另一重要原因。

3.2　模型Ⅱ(水速分段变化模型)

在模型Ⅰ中,我们假设河流中各点水的流速是相同的,这显然与实际不相符。为此,我们将模型Ⅰ中的假设 2 改为:

2′)各段水流速度不同,但每段的速度是恒定不变的,如题设

$$v(y)=\begin{cases}1.47\text{m/s}, 0\text{m}\le y\le 200\text{m}\\ 2.11\text{m/s}, 200\text{m}\le y\le 960\text{m}\\ 1.47\text{m/s}, 960\text{m}\le y\le 1160\text{m}\end{cases}$$

其他假设不变,则可建立以下模型:

$$\min\sum_{i=1}^{n}t_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{v\cos\theta_i},\qquad st\begin{cases}X=\sum_{i=1}^{n}t_i(u_i-v\sin\theta_i)\\ Y=\sum_{i=1}^{n}Y_i\\ -\frac{\pi}{2}\le\theta_i\le\frac{\pi}{2}, i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

其中 $t_i=\frac{Y_i}{v\cos\theta_i}$ 为游泳者游经第 i 段所需时间, $t_i(u_i-v\sin\theta_i)$ 为游泳者游经第 i 段时沿岸边水平方向前进的距离。

本问题将江水分为3段,根据模型可得

$$\min\left(\frac{Y_1}{v\sin\theta_1}+\frac{Y_2}{v\sin\theta_2}+\frac{Y_3}{v\sin\theta_3}\right),\qquad st\begin{cases}X=\sum_{i=1}^{3}t_i(u_i-v\sin\theta_i)\\ Y=Y_1+Y_2+Y_3\\ -\frac{\pi}{2}\le\theta_i\le\frac{\pi}{2}, i=1,2,3\end{cases}$$

由于两岸附近的水流速度相同,因而游泳者在这两段的游泳方向应该是相同的。将 $Y_1=Y_3=200$, $Y_2=760$, $u_1=1.47$, $u_2=2.11$, $v=1.5$ 代入模型,用GINO软件解得

$\theta_1=\theta_3=36.1^\circ$, $\theta_2=28.1^\circ$, $t=904$(秒)=15分4秒

再讨论其游进路线。

游泳者沿岸边及垂直两岸方向的速度分别为 $v_2=u_i-v\sin\theta_i$ 和 $v_1=v\cos\theta_i$,其在沿岸边及垂直两岸方向的瞬时状态为

$$\begin{cases}x=v_2t_i=(u_i-v\sin\theta_i)t_i\\ y=v_1t_i=(v\cos\theta_i)t_i\end{cases}\tag{5}$$

将 $v_1=1.5$, $\theta_i=36.1^\circ$, $\theta_2=28.1^\circ$, $t=904$ 代入式(5),可得游进线路如图1。

实际中选手中之间的速度差异是比较大的,为此我们研究速度在1.35~1.65米/秒之间不同水平下最优游进方向及最短时间。将不同的速度值代入模型Ⅱ,利用GINO软件计算结果见表3。

由见表3可以看出:

1) 游泳者的速度越慢,其游进的角度越大,而且在不同流速区域内 θ 的变化也越大。

2) 水流速度大的区域,偏角相应减小。

3) 当游速大于1.5米/秒以后,总用时变化减缓。这表明,对于高水平选手来说,游泳的方向对成绩至关重要。

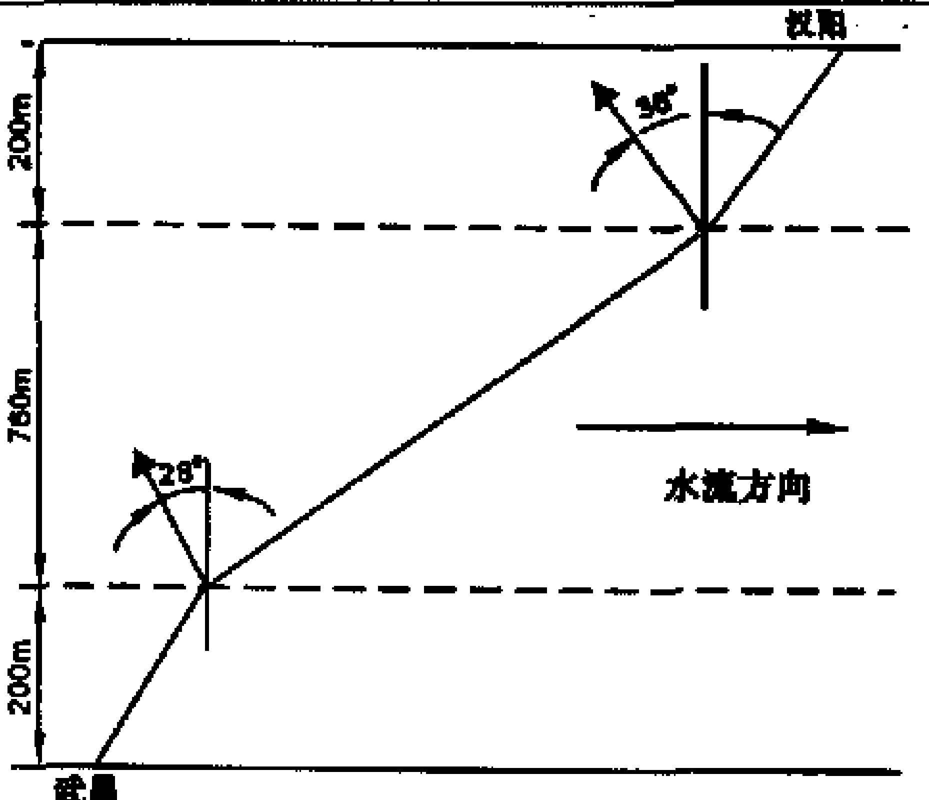

图 1　水速分段不变最佳线路

表 3　不同速度水平下最佳角度－最少用时

速度（米/秒）	θ_1（度）	θ_2（度）	最少用时
1.35	65.7	38.6	24 分 01 秒
1.40	60.5	35.0	21 分 53 秒
1.45	45.0	32.6	16 分 52 秒
1.50	36.1	28.1	15 分 04 秒
1.55	29.7	24.3	13 分 55 秒
1.60	24.9	21.1	13 分 05 秒
1.65	21.0	18.3	12 分 25 秒

3.3　模型Ⅲ(水流速度连续变化模型)

我们可以将模型Ⅱ的假设 2′进一步改进为

2″)设水速随着其与岸边的垂直距离 y 连续变化，记为 $v(y)$。如题中假设

$$v(y)=\begin{cases}\dfrac{2.28}{200}y, & 0\le y\le 200\\ 2.28y, & 200<y<960\\ \dfrac{2.28}{200}(1160-y), & 960\le y\le 1160\end{cases}$$

对于 $v(y)$ 为连续变化的情形，我们假设选手在垂直距离上每前进 λ 米(步长)改变一次角度，把连续变化转化为分段不变，以便简化求解。

若记水流恒速区域的游泳角度为 θ_0，水流变化区域的游泳角度依次为 $\theta_i(i=1,2,\cdots,\frac{400}{\lambda})$，因前 200 米与后 200 米是对称的，因而游泳者变换方向也是前后对称的。于是目标函数和约束条件为

$$\min\sum_{i=0}^{\frac{400}{\lambda}}t_i=\sum_{i=0}^{\frac{400}{\lambda}}\frac{\lambda}{v\cos\theta_i}=\frac{y_0}{v\cos\theta_0}+\sum_{i=1}^{\frac{400}{\lambda}}\frac{\lambda}{v\cos\theta_i}$$

$$st.\begin{cases}X=\sum\limits_{i=0}^{\frac{400}{\lambda}}t_i(u_i-v\sin\theta_i\\ -\dfrac{\pi}{2}\le\theta_i\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

不断调整 λ 的大小，可以得到相应的最佳角度组合值及最短时间。表 4 为用 GINO 软件求得的在 $v=1.5$(米/秒)情况下不同步长所对应的 θ_i 及 t 的最优值。

表 4　$v=1.5$ 不同步长所对应的 θ_i 及 t 的最优值

λ（米）	t（秒）	$\theta_i(i=0,1,2,\cdots)$（度）					
200	892.5	25	37	×	×	×	×
100	884.7	23	44	27	×	×	×
80	883.6	23	46	30	24	×	×
60	882.9	22	48	34	26	23	×
40	882.3	22	51	39	32	27	24

我们的目的是使设定的线路与理想线路尽量吻合，同时又使 λ 尽量大，以便使游泳者尽量少地改变游泳方向。从表 4 可以看出：

(1) 在竞渡过程中,水流速度越大,游泳方向角越小。我们可以这样理解:为了使竞渡时间最短,在水急的区域,游泳者应适当减小 θ,以便使其速度在垂直两岸的方向上的分量增大,减少在这一区段的游泳时间,从而减少向下游漂移的距离。

(2) 总用时与 λ 选取有关,λ 越小,设计的线路越接近理想值。但如果改变角度的次数过多,则游泳者在水中很难实现。从表4的数据我们可以发现,λ 取100与 λ 取40总用时差别只有2.4秒,而 λ 取200则比 λ 取100多用时将近8秒,故我们可以取 $\lambda=100$。选手所应选择的路线如图2。

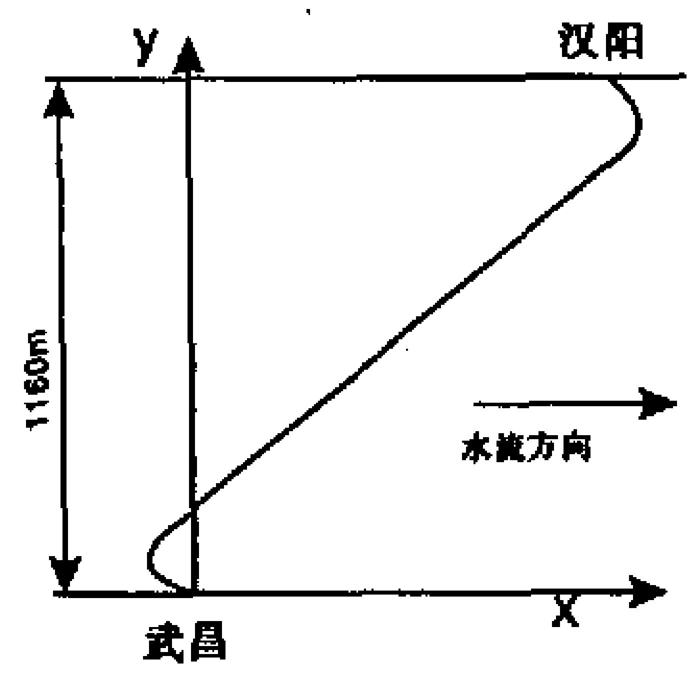

图2 最佳游泳线路图

3.4 模型Ⅳ(水流速度连续变化模型)

模型Ⅲ的水流速度虽然关于 y 连续变化,但与现实有明显差距,我们将其进一步改进,比如设 $v(y)=2.28-2.0\times10^{-11}(y-580)^4$,其图像如图3-b。

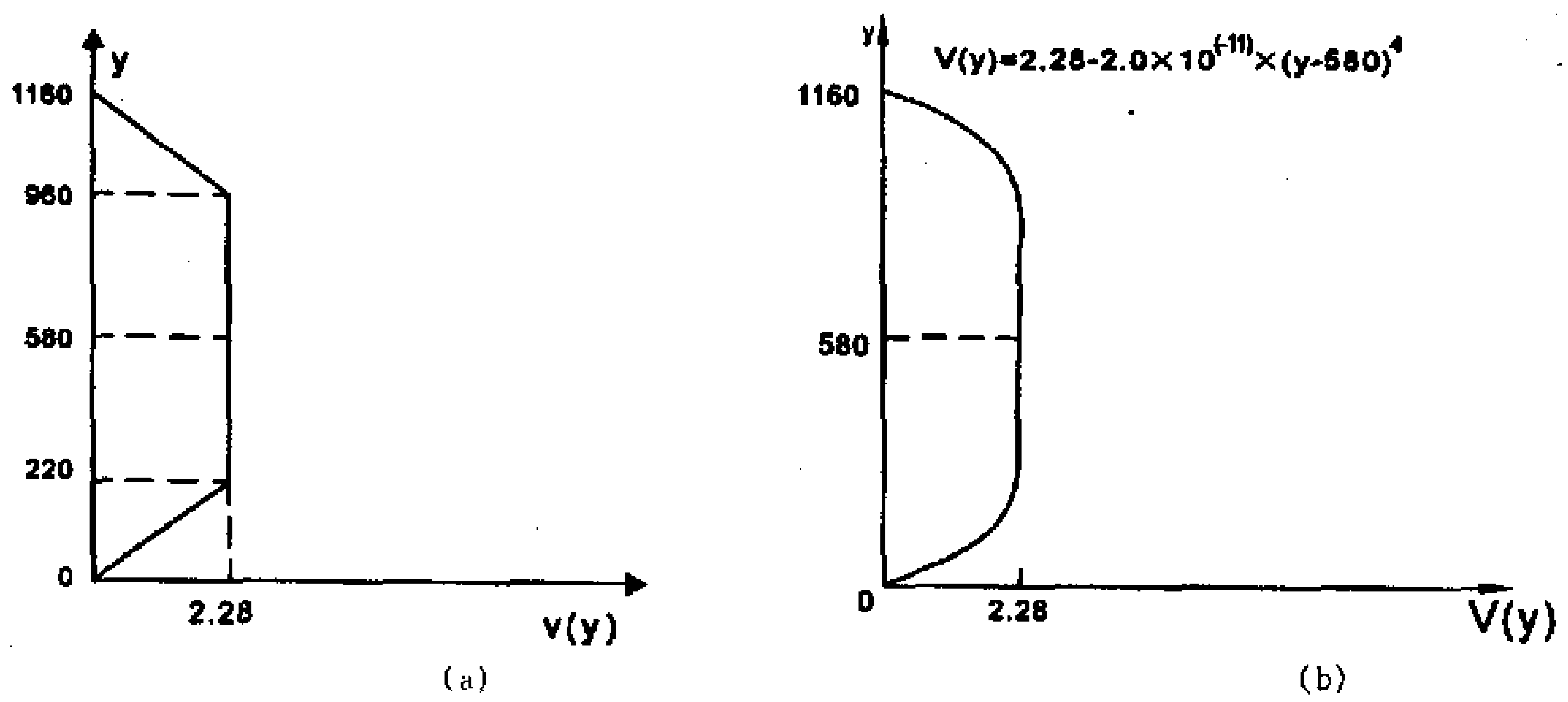

图3 江水流速变化图

表5是用Mathemtica4求得的步长为100米200米所对应的 θ_i 及 t 的最优值。

表5 $v=1.5$ 不同步长所对应的 θ_i 及 t 的最优值

λ(米)	t(秒)	$\theta_i(i=0,1,2,\cdots)$(度)											
100	884.7	36.2	25.9	22.7	21.7	21.4	21.3	21.5	21.5	22.0	23.6	28.5	40.9
200	892.5	34.4	24.5	23.7	23.7	25.7	37.2	×	×	×	×	×	×

若游泳者的速度为1.5米/秒,步长取为100米,易求 $v(y)$ 在模型Ⅲ、模型Ⅳ两种假设下,游泳者最短用时分别为14分44秒和14分21秒。改进后的模型用时更少,其原因是水流速度更接近于实际情况,因此更便于制定合理的方案。

4 竞渡策略——致竞渡爱好者

抢渡长江,对于每个人都极具挑战性。要获得抢渡的胜利,不仅要求抢渡者的速度快,而且要求选择的路线好。

由于江水湍急(其流速远远大于人的游速),因此一旦选择路线错误,就会被江水冲到下游而无法到达终点。研究表明,如果赛事全程不超过江面宽度的1.5倍,一般人是难以采取趋势妆游向对岸的路线达到终点的。以2002年的比赛为例,选手要想成功抢渡,在保证速度稳定在1.44米/秒(时速约为520米)的前提下,还要选择合理的前进方向,方能到达终点。

如果整个流域水速基本不变,则游泳者可以保持方向基本不变;如果水流速度随其距岸边的距离发生变化(越往江心流速越快),则游泳者前进的方向也要随之变化——靠近岸边时,由于水流较缓,游泳者偏向逆流的角度可稍大,以2002年为例,若游泳者的速度为1.5米/秒,水速为1.89米/秒,则出发时左偏角度应接近45度,离岸边100米处时,左偏角减至30度,此后角度逐渐减小,当向江心再前进100米处时,角度减至23度,然后以此角度游至距对岸200米处,再反过来将角度逐渐升至45度,直至终点。

参考文献:

[1] 叶其孝.大学生数学建模竞赛辅导教材(三)[M].长沙:湖南教育出版社,1998

[2] 丁大正.Mathematica4 教程[M].北京:电子工业出版社,2002

Optimum Model of Swimming Race Across a River

YIN Li-wei, LI Zhi-bo, LIU Zhong-liang

Guiding Instructor: CUI Guo-sheng

(Shenyang Institute of Engineering, Shenyang 110036)

Abstract: First, assuming that the flow rate of the river is constant, sets up Model Ⅰ and then educes the best route of 2002's champion should be a straight line from jumping-off point to finish, the speed is about 1.54m/s, and the direction is at an angle of about 27.5 degrees to the left of the perpendicular. Similarly, a competitor, with a speed of 1.5 m/s, should swim at an angle of 31.9 degrees, and the best result is about 15 minutes and 10 seconds. Figures of the lowest speeds and the directions of swimmers who succeeded in accomplishing 1934's and 2002's races and explains why the proportion of success was so different. The qualifying speed for people to swim perpendicular to the opposite bank must be of $v \geqslant (uY/X)$.

On the basis of Model Ⅰ, Model Ⅱ is set up to assume that the flow rate of the river changes in sections. The angle is at 36.1 degrees within 200 meters from the two sides and 28.1 degrees in the middle. The best result is about 15 minutes and 4 seconds.

Finally, sets up the Model Ⅲ and Ⅳ with flow rates of the river continuously changing, and solves these Models by discrete methods. Then, provides the directions that should be readjusted every 100 meters to the swimmers. The optimum route is a reversed 'S'. The basic principle is to swim at a wider angle when near the bank than in the middle.

Keywords: swimming race across a river; mathematic model; 0 ptimization; speed