对于待研究系统的基本假定:

设线性时不变系统的输出为 y，系统有两个输入, 分别记为 y_{ref} 和 r. 其中, y_{ref} 是可以调节的量, 是控制器期待的系统输出, r 是外部对于系统的扰动.

假设系统的整体动态是两种动态的线性叠加, 一类是系统输出跟踪给定期待值 y_{ref} 的过程, 另一类是系统输出对于外部扰动 r 进行衰减的过程. 因此系统的输出 y 包含两部分, 一部分是对于给定期待值 y_{ref} 的跟踪, 这一部分记作 y_{track}，一部分是对于外部扰动 r 的衰减, 这一部分记作 y_{damp}. 再根据系统的线性性质可以得到式(1):

$$y(t)=y_{\mathrm{track}}(t)+y_{\mathrm{damp}}(t) \tag{1}$$

设系统输入 $y_{\mathrm{ref}}(t)$对应的 Laplace 变换为$Y_{\mathrm{ref}}(s)$, 输入$r(t)$对应的 Laplace 变换为$R(s)$, 输出 $y(t)$对应的 Laplace 变换为$Y(s)$, 输出 $y_{\mathrm{track}}(t)$对应的 Laplace 变换为$Y_{\mathrm{track}}(s)$, 输出 $y_{\mathrm{damp}}(t)$对应的 Laplace 变换为$Y_{\mathrm{damp}}(s)$.

根据式(1)可以得到式(2):

$$Y(s)=Y_{\mathrm{track}}(s)+Y_{\mathrm{damp}}(s) \tag{2}$$

设系统输出$Y_{\mathrm{track}}(s)$相对于输入$Y_{\mathrm{ref}}(s)$的传递函数为$H_{\mathrm{track}}(s)$, 由此得到式(3)和(4):

$$H_{\mathrm{track}}(s)=\frac{Y_{\mathrm{track}}(s)}{Y_{\mathrm{ref}}(s)} \tag{3}$$

$$Y_{\mathrm{track}}(s)=H_{\mathrm{track}}(s)Y_{\mathrm{ref}}(s) \tag{4}$$

设系统输出$Y_{\mathrm{damp}}(s)$相对于输入$R(s)$的传递函数为$H_{\mathrm{damp}}(s)$, 由此得到式(5)和(6):

$$H_{\mathrm{damp}}(s)=\frac{Y_{\mathrm{damp}}(s)}{R(s)} \tag{5}$$

$$Y_{\mathrm{damp}}(s)=H_{\mathrm{damp}}(s)R(s) \tag{6}$$

将式(4)和(6)代入式(2), 得到式(7):

$$Y(s)=H_{\mathrm{track}}(s)Y_{\mathrm{ref}}(s)+H_{\mathrm{damp}}(s)R(s) \tag{7}$$

输出跟踪给定期待值的过程的建模:

假设输入 $y_{\mathrm{ref}}(t)$为单位阶跃函数$\varepsilon(t)$, 输出 $y_{\mathrm{track}}(t)$的零状态响应从 0 开始, 以 T_{track} 为时间常数, 按照指数函数的变化规律实现对于输入 $y_{\mathrm{ref}}(t)$的无偏差跟踪, 由此得到式(8):

$$\begin{cases} y_{\mathrm{ref}}(t)=\varepsilon(t) \\ y_{\mathrm{track}}(t)=\left(1-\mathrm{e}^{-T_{\mathrm{track}}^{-1}t}\right)\varepsilon(t) \end{cases} \tag{8}$$

由式(8)可以得到式(9):

$$\begin{cases} Y_{\mathrm{ref}}(s)=\dfrac{1}{s} \\ Y_{\mathrm{track}}(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+T_{\mathrm{track}}^{-1}}=\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{1}{s+T_{\mathrm{track}}^{-1}}\left(s+T_{\mathrm{track}}^{-1}-s\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{\mathrm{ref}}(s)=\dfrac{1}{s} \\ Y_{\mathrm{track}}(s)=\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{T_{\mathrm{track}}^{-1}}{s+T_{\mathrm{track}}^{-1}} \end{cases} \tag{9}$$

将式(9)代入式(3), 得到式(10):

$$H_{\mathrm{track}}(s)=\frac{\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{T_{\mathrm{track}}^{-1}}{s+T_{\mathrm{track}}^{-1}}}{s^{-1}}$$

$$H_{\mathrm{track}}(s)=\frac{1}{T_{\mathrm{track}}s+1} \tag{10}$$

将式(10)代入式(4)，得到式(11):

$$Y_{\mathrm{track}}(s)=\frac{1}{T_{\mathrm{track}}s+1}Y_{\mathrm{ref}}(s)$$

$$T_{\mathrm{track}}sY_{\mathrm{track}}(s)+Y_{\mathrm{track}}(s)=Y_{\mathrm{ref}}(s) \tag{11}$$

对于式(11)进行 Laplace 逆变换，得到式(12):

$$T_{\mathrm{track}}\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{track}}(t)}{\mathrm{d}t}+y_{\mathrm{track}}(t)=y_{\mathrm{ref}}(t) \tag{12}$$

输出对于外部扰动进行衰减的过程的建模:

假设输入 $r(t)$ 为单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$，输出 $y_{\mathrm{damp}}(t)$ 的零状态响应从 K_{damp} 开始，以 T_{damp} 为时间常数，按照指数函数的变化规律衰减至，由此得到式(13):

$$\begin{cases} r(t)=\varepsilon(t) \\ y_{\mathrm{damp}}(t)=K_{\mathrm{damp}}\mathrm{e}^{-T_{\mathrm{damp}}^{-1}t}\varepsilon(t) \end{cases} \tag{13}$$

由式(13)可以得到式(14):

$$\begin{cases} R(s)=\dfrac{1}{s} \\ Y_{\mathrm{damp}}(s)=\dfrac{K_{\mathrm{damp}}}{s+T_{\mathrm{damp}}^{-1}} \end{cases} \tag{14}$$

将式(14)代入式(5)，得到式(15):

$$H_{\mathrm{damp}}(s)=\frac{\dfrac{K_{\mathrm{damp}}}{s+T_{\mathrm{damp}}^{-1}}}{s^{-1}}$$

$$H_{\mathrm{damp}}(s)=\frac{K_{\mathrm{damp}}T_{\mathrm{damp}}s}{T_{\mathrm{damp}}s+1} \tag{15}$$

将式(15)代入式(6)，得到式(16):

$$Y_{\mathrm{damp}}(s)=\frac{K_{\mathrm{damp}}T_{\mathrm{damp}}s}{T_{\mathrm{damp}}s+1}R(s)$$

$$T_{\mathrm{damp}}sY_{\mathrm{damp}}(s)+Y_{\mathrm{damp}}(s)=K_{\mathrm{damp}}sT_{\mathrm{damp}}R(s) \tag{16}$$

对于式(16)进行 Laplace 逆变换，得到式(17):

$$T_{\mathrm{damp}}\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{damp}}(t)}{\mathrm{d}t}+y_{\mathrm{damp}}(t)=K_{\mathrm{damp}}T_{\mathrm{damp}}\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} \tag{17}$$