定理 1: 式(1)成立:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{6}\pi^2 \tag{1}$$

证明: 式(2)给出了一个以 x 为未知量的超越方程:

$$\sin x=0 \tag{2}$$

将方程(2)的解记作 x_k , $k=0,1,2,\cdots$, 再将函数 $\sin x$ 看做是 x 的多项式函数, 那么该多项式可以根据方程(2)的解进行因式分解, 由此得到式(3):

$$\sin x=\left(x-x_0\right)\cdot\prod_{k=1}^{+\infty}\left[l_k\left(x-x_k\right)\right] \tag{3}$$

其中: l_k , $k=1,2,3,\cdots$, 为待定系数.

由三角函数的性质可知, 式(4)给出了方程(2)的全部解:

$$x_0=0\,,\ x_{2k-1}=k\pi\,,\ x_{2k}=-k\pi\,,\ k=1,2,3,\cdots \tag{4}$$

将式(4)代入式(3), 得到式(5):

$$\sin x=x\cdot\prod_{k=1}^{+\infty}\left[l_{2k-1}\left(x-k\pi\right)l_{2k}\left(x+k\pi\right)\right]$$

$$\sin x=x\cdot\prod_{k=1}^{+\infty}\left[l_{2k-1}\,l_{2k}\left(x^2-k^2\pi^2\right)\right] \tag{5}$$

由泰勒-麦克劳林公式, 可以得到式(6):

$$\sin x=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^{k-1}x^{2k-1}}{\left(2k-1\right)!} \tag{6}$$

将式(6)代入式(5), 得到式(7):

$$x\cdot\prod_{k=1}^{+\infty}\left[l_{2k-1}\,l_{2k}\left(x^2-k^2\pi^2\right)\right]=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^{k-1}x^{2k-1}}{\left(2k-1\right)!}$$

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left[l_{2k-1}\,l_{2k}\left(x^2-k^2\pi^2\right)\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}x^{2k}}{\left(2k+1\right)!} \tag{7}$$

对比式(7)等号左右两边 0 次项的系数，得到式(8):

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(-l_{2k-1}\,l_{2k}\,k^2\pi^2\right)=1 \tag{8}$$

按照式(9)确定待定系数 l_k , $k=1,2,3,\cdots$:

$$l_{2k-1}=l_{2k}=\frac{\mathrm{j}}{k\pi},\ \ k=1,2,3,\cdots \tag{9}$$

由式(9)可进一步得到式(10):

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(-l_{2k-1}\,l_{2k}\,k^2\pi^2\right)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{\mathrm{j}}{k\pi}\cdot\frac{\mathrm{j}}{k\pi}k^2\pi^2\right)=\prod_{k=1}^{+\infty}1$$

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(-l_{2k-1}\,l_{2k}\,k^2\pi^2\right)=1 \tag{10}$$

对比式(8)和(10)可知, 式(9)对于待定系数 l_k , $k=1,2,3,\cdots$, 的选取能够满足式(8), 因此是可行的. 再将式(9)代入式(7), 得到式(11):

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{\mathrm{j}}{k\pi}\cdot\frac{\mathrm{j}}{k\pi}\left(x^2-k^2\pi^2\right)\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}x^{2k}}{\left(2k+1\right)!}$$

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}x^{2k}}{\left(2k+1\right)!} \tag{11}$$

式(11)中，等号左边 2 次项系数为 $-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}$，等号右边 2 次项系数为 $-\frac{1}{6}$，由此得到式(12):

$$-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}=-\frac{1}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{6}\pi^2 \tag{12}$$

式(12)就是式(1)，因此本定理得证. Q.E.D.