定义 1: 设 $\boldsymbol{A} \in \Re^{n\times n}$，其中 $n \in \boldsymbol{N}_+$.

按照式(1)定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的指数 $e^{\boldsymbol{A}}$:

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{E} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k\,!} \tag{1}$$

定理 1: 设 $\boldsymbol{A} \in \Re^{n\times n}$，$n \in \boldsymbol{N}_+$，$t_0 \in \Re$ 是常数，$t \in \Re$. 按照定义 1 构造以 t 为自变量的矩阵函数 $e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}$，则式(2)成立:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\right] = e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{A} \tag{2}$$

证明: 由定义 1 可以分别得到式(3)和(4):

$$e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)} = \boldsymbol{E} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(t_0-t)^k \boldsymbol{A}^k}{k\,!} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{E} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(t_0-t)^k \boldsymbol{A}^k}{k\,!}\right] = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{(t_0-t)^k \boldsymbol{A}^k}{k\,!}\right] \\
&= \boldsymbol{O} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(t_0-t)^{k-1} \boldsymbol{A}^k}{k\,!} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(t_0-t)^{k-1} \boldsymbol{A}^k}{(k-1)!} = -\boldsymbol{A} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(t_0-t)^{k-1} \boldsymbol{A}^k}{(k-1)!} \\
&= -\boldsymbol{A} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(t_0-t)^k \boldsymbol{A}^{k+1}}{k\,!} = -\boldsymbol{A} - \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(t_0-t)^k \boldsymbol{A}^k}{k\,!}\right]\boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\right] = -\left[\boldsymbol{E} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(t_0-t)^k \boldsymbol{A}^k}{k\,!}\right]\boldsymbol{A} \tag{4}$$

将式(3)代入式(4)，得到式(5):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\right] = e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{A} \tag{5}$$

式(5)就是式(2)，因此定理成立. Q.E.D.

定理 2: 设 $\boldsymbol{A} \in \Re^{p\times p}$，$\boldsymbol{B} \in \Re^{p\times p}$，$p \in \boldsymbol{N}_+$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足式(6):

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} \tag{6}$$

则对于任意大于1的整数 n，式(7)成立:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n = \boldsymbol{A}^n + \boldsymbol{B}^n + \sum_{l=1}^{n-1} \mathrm{C}_n^l \boldsymbol{A}^{n-l}\boldsymbol{B}^l \tag{7}$$

证明: 采用数学归纳法证明本定理，证明过程分为(i)和(ii)两步:

(i) 当 $n=2$ 时.

由矩阵幂运算的定义可知式(8)成立:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} \tag{8}$$

将式(6)代入式(8)，得到式(9):

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 + 2\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 + \mathrm{C}_2^1 \boldsymbol{AB}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 + \sum_{l=1}^{1} \mathrm{C}_2^l \boldsymbol{AB} \tag{9}$$

式(9)说明式(7)在 $n=2$ 时成立.

(ii) 假设当 $n=k$ 时，式(7)成立，其中 k 是大于1的整数，由此得到式(10):

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k = \boldsymbol{A}^k + \boldsymbol{B}^k + \sum_{l=1}^{k-1} \mathrm{C}_k^l \boldsymbol{A}^{k-l}\boldsymbol{B}^l \tag{10}$$

根据式(10)可以进一步得到式(11):

$$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{k}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)=\left(\boldsymbol{A}^{k}+\boldsymbol{B}^{k}+\sum_{l=1}^{k-1}\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l}\boldsymbol{B}^{l}\right)\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)$$

$$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{k+1}=\boldsymbol{A}^{k+1}+\boldsymbol{B}^{k}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{k+1}+\sum_{l=1}^{k-1}\left(\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l}\boldsymbol{B}^{l}\boldsymbol{A}+\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l}\boldsymbol{B}^{l+1}\right)\tag{11}$$

由式(6)可以得到式(12):

$$\boldsymbol{B}^{k}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{B}+\sum_{l=1}^{k-1}\left(\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l}\boldsymbol{B}^{l}\boldsymbol{A}+\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l}\boldsymbol{B}^{l+1}\right)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{k}+\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{B}+\sum_{l=1}^{k-1}\left(\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l+1}\boldsymbol{B}^{l}+\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l}\boldsymbol{B}^{l+1}\right)$$

$$=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{k}+\sum_{l=1}^{k-1}\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l+1}\boldsymbol{B}^{l}\right)+\left(\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{B}+\sum_{l=1}^{k-1}\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l}\boldsymbol{B}^{l+1}\right)$$

$$=\left(\mathrm{C}_{k}^{k}\boldsymbol{A}^{k-k+1}\boldsymbol{B}^{k}+\sum_{l=1}^{k-1}\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l+1}\boldsymbol{B}^{l}\right)+\left(\mathrm{C}_{k}^{0}\boldsymbol{A}^{k-0}\boldsymbol{B}^{0+1}+\sum_{l=1}^{k-1}\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l}\boldsymbol{B}^{l+1}\right)$$

$$=\left(\sum_{l=1}^{k}\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l+1}\boldsymbol{B}^{l}\right)+\left(\sum_{l=0}^{k-1}\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l}\boldsymbol{B}^{l+1}\right)=\left(\sum_{l=1}^{k}\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l+1}\boldsymbol{B}^{l}\right)+\left(\sum_{l=1}^{k}\mathrm{C}_{k}^{l-1}\boldsymbol{A}^{k-l+1}\boldsymbol{B}^{l}\right)$$

$$=\sum_{l=1}^{k}\left(\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l+1}\boldsymbol{B}^{l}+\mathrm{C}_{k}^{l-1}\boldsymbol{A}^{k-l+1}\boldsymbol{B}^{l}\right)=\sum_{l=1}^{k}\left[\left(\mathrm{C}_{k}^{l}+\mathrm{C}_{k}^{l-1}\right)\boldsymbol{A}^{k-l+1}\boldsymbol{B}^{l}\right]$$

$$\boldsymbol{B}^{k}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{B}+\sum_{l=1}^{k-1}\left(\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l}\boldsymbol{B}^{l}\boldsymbol{A}+\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l}\boldsymbol{B}^{l+1}\right)=\sum_{l=1}^{(k+1)-1}\mathrm{C}_{k+1}^{l}\boldsymbol{A}^{(k+1)-l}\boldsymbol{B}^{l}\tag{12}$$

将式(12)代入式(11), 得到式(13):

$$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{k+1}=\boldsymbol{A}^{k+1}+\boldsymbol{B}^{k+1}+\sum_{l=1}^{(k+1)-1}\mathrm{C}_{k+1}^{l}\boldsymbol{A}^{(k+1)-l}\boldsymbol{B}^{l}\tag{13}$$

对比式(7)和式(13)可知, 当 $n=k+1$ 时, 式(7)仍然成立.

根据(i)和(ii)两步的结论及数学归纳法原理可知, 对于任意大于 1 的整数 n 式(7)均成立, 因此定理结论成立. Q.E.D.

定理 3: 设 $\boldsymbol{A}\in\Re^{p\times p}$, $\boldsymbol{B}\in\Re^{p\times p}$, $p\in\boldsymbol{N}_{+}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足式(14):

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\tag{14}$$

则式(15)成立:

$$e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}}=e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}\tag{15}$$

证明: 根据定义 1 可以分别得到式(16), (17)和(18):

$$e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{E}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{k}}{k!}$$

$$e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{k}}{k!}\tag{16}$$

$$e^{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{E}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}^{k}}{k!}\tag{17}$$

$$e^{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{E}+\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{B}^{l}}{l!}\tag{18}$$

式(14)满足定理 2 成立的条件, 并根据定理 2 式(7)得到式(19):

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^{k}}{k!}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\boldsymbol{A}^{k}+\boldsymbol{B}^{k}+\sum_{l=1}^{k-1}\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l}\boldsymbol{B}^{l}\right)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}^{k}}{k!}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{B}^{k}}{k!}+\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{\mathrm{C}_{k}^{l}\boldsymbol{A}^{k-l}\boldsymbol{B}^{l}}{k!}$$

$$=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}^{k}}{k!}+\sum_{l=2}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{B}^{l}}{l!}+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\left(k+l\right)!\,\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{B}^{l}}{l!\left(k+l-l\right)!\left(k+l\right)!}$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^k}{k!}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}+\sum_{l=2}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{B}^l}{l!}+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^l}{k!\,l!} \tag{19}$$

将式(19)代入式(16)，得到式(20):

$$e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}+\sum_{l=2}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{B}^l}{l!}+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^l}{k!\,l!}$$

$$e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{E}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}+\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{B}^l}{l!}+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^l}{k!\,l!} \tag{20}$$

根据式(17)和(18)，得到式(21):

$$e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}}=\left(\boldsymbol{E}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}\right)\left(\boldsymbol{E}+\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{B}^l}{l!}\right)$$

$$e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{E}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}+\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{B}^l}{l!}+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^l}{k!\,l!} \tag{21}$$

将式(21)代入式(20)，得到式(22):

$$e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}}=e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} \tag{22}$$

式(22)就是式(13)，因此定理结论成立. Q.E.D.

定理 4: 式(23)成立:

$$e^{\boldsymbol{O}}=\boldsymbol{E} \tag{23}$$

证明: 根据定义 1 可以得到式(24):

$$e^{\boldsymbol{O}}=\boldsymbol{E}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{O}^k}{k!}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{O}$$

$$e^{\boldsymbol{O}}=\boldsymbol{E} \tag{24}$$

式(24)就是式(23)，因此定理结论成立. Q.E.D.

定理 5: 设 $\boldsymbol{A}\in\Re^{n\times n}$，$n\in\boldsymbol{N}_+$，$c_1\in\Re$，$c_2\in\Re$. 式(25)成立:

$$e^{c_1\boldsymbol{A}}e^{c_2\boldsymbol{A}}=e^{\left(c_1+c_2\right)\boldsymbol{A}} \tag{25}$$

证明: 根据矩阵乘法的性质分别得到式(26)和(27):

$$\left(c_1\boldsymbol{A}\right)\cdot\left(c_2\boldsymbol{A}\right)=c_1c_2\boldsymbol{A}^2 \tag{26}$$

$$\left(c_2\boldsymbol{A}\right)\cdot\left(c_1\boldsymbol{A}\right)=c_1c_2\boldsymbol{A}^2 \tag{27}$$

将式(26)代入式(27)，得到式(28):

$$\left(c_1\boldsymbol{A}\right)\cdot\left(c_2\boldsymbol{A}\right)=\left(c_2\boldsymbol{A}\right)\cdot\left(c_1\boldsymbol{A}\right) \tag{28}$$

式(28)说明矩阵 $c_1\boldsymbol{A}$ 和 $c_2\boldsymbol{A}$ 满足乘法交换律，再根据定理 3 可以得到式(29):

$$e^{c_1\boldsymbol{A}}e^{c_2\boldsymbol{A}}=e^{c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{A}}$$

$$e^{c_1\boldsymbol{A}}e^{c_2\boldsymbol{A}}=e^{\left(c_1+c_2\right)\boldsymbol{A}} \tag{29}$$

式(29)就是式(25)，因此定理结论成立. Q.E.D.