

## 附录二 Matlab 在线性代数中的应用

### §1 向量组的线性相关性

求列向量组  $A$  的一个最大线性无关组可用命令 `rref(A)` 将  $A$  化成阶梯形的行最简形式, 其中单位向量对应的列向量即为最大线性无关组所含向量, 其它列向量的坐标即为其对应向量用最大线性无关组线性表示的系数。

例 1 求下列矩阵列向量组的一个最大无关组。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

解 编写 M 文件 `ex1.m` 如下:

```
format rat
a=[1,-2,-1,0,2;-2,4,2,6,-6;2,-1,0,2,3;3,3,3,3,4];
b=rref(a)
```

求得

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 16/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

记矩阵  $A$  的五个列向量依次为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ , 则  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  是列向量组的一个最大无关组。且有

$$\alpha_3 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2, \quad \alpha_5 = \frac{16}{3}\alpha_1 - \frac{1}{9}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_4.$$

例 2 设  $A = [a_1, a_2, a_3] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = [b_1, b_2] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ ,

验证  $a_1, a_2, a_3$  是  $R^3$  的一个基, 并把  $b_1, b_2$  用这个基线性表示。

解 编写 M 文件 `ex2.m` 如下:

```
format rat
a=[2,2,-1;2,-1,2;-1,2,2];b=[1,4;0,3;-4,2];
c=rref([a,b])
```

求得

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

### §2 线性方程组

Matlab 中解线性方程组可以使用“\”。虽然表面上只是一个简简单单的符号, 而它的内部却包含许许多多的自适应算法, 如对超定方程用最小二乘法, 对欠定方程它将给出范数最小的一个解, 解三对角阵方程组时用追赶法等。

另外欠定方程组可以使用求矩阵  $A$  的阶梯形行最简形式命令 `rref(A)`, 求出所有的

基础解系。

例3 求解下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解 编写 M 文件 ex3.m 如下:

```
format rat
a=[2,1,-5,1;1,-3,0,-6;0,2,-1,2;1,4,-7,6];
b=[8;9;-5;0];
solution=a\b
求得 solution=[3 -4 -1 1]'。
```

例4 求超定方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 11 \\ 3x_1 - 5x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

解 编写 M 文件 ex4.m 如下:

```
a=[2,4;3,-5;1,2;2,1];
b=[11;3;6;7];
solution=a\b
求得 solution=[ 3.0403  1.2418]'。
```

例5 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

解 编写 M 文件 ex5.m 如下:

```
format rat
a=[1,-1,-1,1,0;1,-1,1,-3,1;1,-1,-2,3,-1/2];
b=rref(a)
```

求得:

```
b= 1 -1 0 -1 1/2
    0  0 1 -2 1/2
    0  0 0  0  0
```

故方程组有解, 并有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

### § 3 相似矩阵及二次型

有时我们需要精确的特征值和特征向量，就须利用 Matlab 的符号运算功能。

在 Matlab 中创建符号矩阵和创建数值矩阵的形式很相似，只不过要用到符号定义函数 sym。下面介绍使用此函数创建符号函数的几种形式。

#### 3.1 使用 sym 函数直接创建符号矩阵

此方法和直接创建数值矩阵的方法几乎完全相同。矩阵元素可以是符号表达式，各符号表达式的长度可以不同，矩阵元素之间可用空格或逗号分隔。

例如：

```
x=sym(' [a+sin(d),b;1/c,d] ');  
y=det(x)
```

求得  $y=(d*c*a+d*c*\sin(d)-b)/c$

#### 3.2 将数值矩阵转化为符号矩阵

在 Matlab 中，数值矩阵不能直接参与符号运算，必须先转化为符号矩阵。

例如：

```
a=[2/3, sqrt(2);3, 1]  
a= 0.6667    1.4142  
    3.0000    1.0000
```

```
b=sym(a)
```

```
b=[ 2/3, sqrt(2)]  
   [ 3,    1]
```

#### 3.3 符号矩阵的索引和修改

Matlab 的符号矩阵索引和修改同数值矩阵的索引和修改完全相同。

例如：对上例中的矩阵 b 进行修改

```
b(2,2)=' log(9)'
```

#### 3.4 举例

例 6 求一个正交变换  $x = Py$ ，把二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

化为标准形。

解：二次型的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由

```
A=[0,1,1,-1;1,0,-1,1;1,-1,0,1;-1,1,1,0];  
[P,D]=eig(A)
```

求得

```
P= 0.7887    0.2113    0.5000   -0.2887  
    0.2113    0.7887   -0.5000    0.2887  
    0.5774   -0.5774   -0.5000    0.2887  
         0         0    0.5000    0.8660  
D= 1.0000         0         0         0  
     0    1.0000         0         0
```

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -3.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{array}$$

$P$  就是所求的正交矩阵, 使得  $P^TAP=D$ , 令  $X = PY$ , 其中  $X = [x_1 \ \cdots \ x_4]^T$ ,  $Y = [y_1 \ \cdots \ y_4]^T$ , 化简后的二次型为  $g = y_1^2 + y_2^2 - 3y_3^2 + y_4^2$ 。

上面求得的正交矩阵  $P$  是数值解, 下面我们求正交矩阵的精确解。

由

```
a=sym(' [0,1,1,-1;1,0,-1,1;1,-1,0,1;-1,1,1,0] ');
[v,d]=eig(a)
```

求得

$$v = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

即求得矩阵  $A$  的特征值为 1、1、1、3, 对应的特征向量分别是矩阵  $v$  的第 1、2、3、4 列。再把对应于特征值 1 的 3 个特征向量正交化、单位化, 我们就容易求出正交矩阵  $P$ 。