

题目：某人外出旅游，现有三个旅行包，容积大小分别为 1000 毫升、1500 毫升和 2000 毫升，根据需要列出需带物品的清单，其中一些是必带物品共 7 件，其体积大小分别为 400、300、150、250、450、760、190、（单位：毫升）、尚有十件可带可不带的物品，如果不带将在目的地购买，通过网络查询可以得知其在目的地的价格（单位：元）。这些物品的容量及价格分别见下表，是给一个合理的安排方案把物品放在三个旅行包里。

物品	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
体积	200	350	500	430	320	120	700	420	250	100
价格	15	45	100	70	50	75	200	90	20	30

提示：参考运筹学中的整数规划，0-1 规划等知识。

合理分配及分装

摘要

本题解决了一个生活中的现实问题，贴近实际生活，很现实也很有趣，解决了分配及分装问题。本题偏重点在于如何将一个限定容量的旅行包充分利用，并且暗含了如何才是最经济合理的，不仅要带的多，充分利用空间，而且还要使在到达目的地后花费最少，也就是在最后容许的范围内，所携带的物品的价格之和达最大值。综合这两方面进行解决该问题，是最理想的。解决本问题的方法利用运筹学中 0-1 规划思想，并利用 0-1 规划中的 **Fitering Constraint** 方法计算得出结果。最后可有两种选择，即：一、容量达最大；二、价格达最大。

一. 问题的重述

某人外出旅游，现有三个旅行包，容积大小分别为 1000 毫升、1500 毫升和 2000 毫升，根据需要列出需带物品的清单，其中一些是必带物品共 7 件，其体积大小分别为 400、300、150、250、450、760、190、（单位：毫升）、尚有十件可带可不带的物品，如果不带将在目的地购买，通过网络查询可以得知其在目的地的价格（单位：元）。这些物品的容量及价格分别见下表，是给一个合理的方案。方案要求求出最合理的分配方法。

二. 问题的分析

对以上问题进行分析可以得知, 如何装才能是旅行包充分利用, 赚多少才是最合适的、最经济的, 装什么最划算。这就要求从三个方面进行考虑, 即: 容量、物品种类、经济花费。通过计算可知必须带的物品刚可以用两包带完, 即: $400+300+150+250+450+760+190=2500$, 进行进一步分析, $400+450+150=1000$ 毫升, $300+250+760+190=1500$ 毫升, 很充分的利用了 1000 毫升和 1500 毫升的旅行包。现在要解决的就是能充分利用剩下的一个 2000 毫升的旅行包, 同时还要注意的是那些可待可不带的物品有不同的价格, 所以就要求带了的物品价格总和达最大, 综上所述, 就是同时考虑容量和价格。对此题进行解答,

I、第一步通过接单的算术运算确定现在要解决的问题就是如何合理的充分的利用 2000 毫升的旅行包, 第二步利用 0-1 规划列方程, 利用运筹学思想完成计算。**II**、利用对价格与容量的比进行检验价格最大值。

三. 符号说明

Θ : 各物品容量的过滤条件符号;

O : 各物品价格的过滤条件符号;

x_i : 每种物品的容量符号;

y_i : 每种物品的价格符号;

Σ : 求和符号;

\checkmark : 判断满足条件符号;

×：判断不满足条件符号；

Λ_i ：每种物品的价格与容量的比值符号。

四. 建立方程进行计算求解

I: 每一种物品的容积为 x_i , 需要买该物品的价钱为 y_i , 其中 ($i=1, 2, \dots, 10$),

由已知可得:

利用 0-1 规划, 则有: $x_i \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ (等于 1 时被选中, 等于 0 时没有被选中)。

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{i=1}^{10} x_i \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 2000 \text{-----(1)} \\ x_i = 0, x_i = 1 \text{-----(2)} \end{array} \right. & \left. \vphantom{\sum_{i=1}^{10} x_i} \right\} (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max c &= \sum_{i=1}^{10} y_i \\ \text{与此同时又有: } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{10} y_i \geq 0 \text{-----(3)} \\ x_i = 1 \text{-----(4)} \end{array} \right. & \left. \vphantom{\sum_{i=1}^{10} y_i} \right\} (b) \end{aligned}$$

利用 **Fitering Constraint** 过滤法对 (a)、(b) 进行求解:

现在构造一个过滤条件:

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} \geq 0 \text{-----} \ominus \\ 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 + 0y_7 + 0y_8 + 0y_9 + 0y_{10} \geq 0 \text{-----} \text{O} \end{cases}$$

以其为过滤条件进行计算（利用表格进行计算）：

点	条件		是否满足条件	z 值	条件		是否满足条件	c 值
	⊖	(1)			⊖	(3)		
(0,0,0,0,0,0,0,0,0,1)	0	100	√	100	0	30	√	30
(0,0,0,0,0,0,0,0,1,0)	0	250	√	250	0	20	√	20
(0,0,0,0,0,0,0,1,0,0)	0	420	√	420	0	90	√	90
(0,0,0,0,0,0,1,0,0,0)	0	700	√	700	0	200	√	200
(0,0,0,0,0,1,0,0,0,0)	0	120	√	120	0	75	√	75
(0,0,0,0,1,0,0,0,0,0)	0	320	√	320	0	50	√	50
(0,0,0,1,0,0,0,0,0,0)	0	430	√	430	0	70	√	70
(0,0,1,0,0,0,0,0,0,0)	0	500	√	500	0	100	√	100
(0,1,0,0,0,0,0,0,0,0)	0	350	√	350	0	45	√	45
(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0)	0	200	√	200	0	15	√	15
(1,0,0,0,0,0,0,0,0,1)	0	300	√	300	0	45	√	45
(1,0,0,0,0,0,0,0,1,0)	0	450	√	450	0	35	√	35
(1,0,0,0,0,0,0,1,0,0)	0	420	√	420	0	105	√	105
(1,0,0,0,0,0,1,0,0,0)	0	900	√	900	0	215	√	215
(1,0,0,0,0,1,0,0,0,0)	0	320	√	320	0	90	√	90
(1,0,0,0,1,0,0,0,0,0)	0	520	√	520	0	65	√	65

(1,1,0,0,0,0,0,0,0,0)	0	550	√	550	0	60	√	60
(1,0,1,0,0,0,0,0,0,0)	0	700	√	700	0	115	√	115
(1,0,0,1,0,0,0,0,0,0)	0	630	√	630	0	85	√	85
(1,1,0,0,0,0,0,0,0,1)	0	650	√	650	0	90	√	90
(1,1,0,0,0,0,0,0,1,0)	0	800	√	800	0	80	√	80
(1,1,0,0,0,0,0,1,0,0)	0	970	√	970	0	150	√	150
(1,1,0,0,0,0,1,0,0,0)	0	1250	√	1250	0	260	√	260
(1,1,0,0,0,1,0,0,0,0)	0	670	√	670	0	135	√	135
(1,1,0,0,1,0,0,0,0,0)	0	870	√	870	0	110	√	110
(1,1,0,1,0,0,0,0,0,0)	0	980	√	980	0	130	√	130
(1,1,1,0,0,0,0,0,0,0)	0	1050	√	1050	0	160	√	160
(1,1,1,0,0,0,0,0,0,1)	0	1150	√	1150	0	190	√	190
(1,1,1,0,0,0,0,0,1,0)	0	1300	√	1300	0	180	√	180
(1,1,1,0,0,0,0,1,0,0)	0	1470	√	1470	0	250	√	250
(1,1,1,0,0,0,1,0,0,0)	0	1750	√	1750	0	360	√	360
(1,1,1,0,0,1,0,0,0,0)	0	1170	√	1170	0	235	√	235
(1,1,1,0,1,0,0,0,0,0)	0	1370	√	1370	0	210	√	210
(1,1,1,1,0,0,0,0,0,0)	0	1480	√	1480	0	230	√	230
(1,1,1,1,0,0,0,0,0,1)	0	1580	√	1580	0	260	√	260
(1,1,1,1,0,0,0,0,1,0)	0	1730	√	1730	0	250	√	250
(1,1,1,1,0,0,0,1,0,0)	0	1900	√	1900	0	320	√	320
(1,1,1,1,0,0,1,0,0,0)	0	2180	×		0	430	×	

(1,1,1,1,0,1,0,0,0,0)	0	1600	√	1600	0	305	√	305
(1,1,1,1,1,0,0,0,0,0)	0	1800	√	1800	0	280	√	280
(1,1,1,1,1,0,0,0,0,1)	0	1900	√	1900	0	310	√	310
(1,1,1,1,1,0,0,0,1,0)	0	2050	×		0	300	×	
(1,1,1,1,1,0,0,1,0,0)	0	2220	×		0	370	×	
(1,1,1,1,1,0,1,0,0,0)	0	2500	×		0	480	×	
(1,1,1,1,1,1,0,0,0,0)	0	1920	√	1920	0	355	√	355
(1,1,1,1,1,1,0,0,0,1)	0	2020	×		0	385	×	
(1,1,1,1,1,1,0,0,1,0)	0	2170	×		0	375	×	
(1,1,1,1,1,1,0,1,0,0)	0	2340	×		0	445	×	
(1,1,1,1,1,1,1,0,0,0)	0	2620	×		0	555	×	
(1,1,1,1,1,1,1,0,0,1)	0	2720	×		0	585	×	
(1,1,1,1,1,1,1,0,1,0)	0	2870	×		0	575	×	
(1,1,1,1,1,1,1,1,0,0)	0	3040	×		0	645	×	
(1,1,1,1,1,1,1,1,0,1)	0	3140	×		0	675	×	
(1,1,1,1,1,1,1,1,1,0)	0	3290	×		0	665	×	
(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	0	3390	×		0	695	×	
(0,1,0,0,0,0,0,0,0,1)	0	450	√	450	0	75	√	75
(0,1,0,0,0,0,0,0,1,0)	0	600	√	600	0	65	√	65
(0,1,0,0,0,0,0,1,0,0)	0	770	√	770	0	135	√	135
(0,1,0,0,0,0,1,0,0,0)	0	1050	√	1050	0	245	√	245
(0,1,0,0,0,1,0,0,0,0)	0	470	√	470	0	120	√	120

(0,1,0,0,1,0,0,0,0,0)	0	670	√	670	0	95	√	95
(0,1,0,1,0,0,0,0,0,0)	0	780	√	780	0	115	√	115
(0,1,1,0,0,0,0,0,0,0)	0	850	√	850	0	145	√	145
(0,1,1,0,0,0,0,0,0,1)	0	950	√	950	0	175	√	175
(0,1,1,0,0,0,0,0,1,0)	0	1100	√	1100	0	165	√	165
(0,1,1,0,0,0,0,1,0,0)	0	1270	√	1270	0	235	√	235
(0,1,1,0,0,0,1,0,0,0)	0	1550	√	1550	0	345	√	345
(0,1,1,0,0,1,0,0,0,0)	0	970	√	970	0	220	√	220
(0,1,1,0,1,0,0,0,0,0)	0	1170	√	1170	0	195	√	195
(0,1,1,1,0,0,0,0,0,0)	0	1280	√	1280	0	215	√	215
(0,1,1,1,0,0,0,0,0,1)	0	1380	√	1380	0	245	√	245
(0,1,1,1,0,0,0,0,1,0)	0	1530	√	1530	0	235	√	235
(0,1,1,1,0,0,0,1,0,0)	0	1720	√	1720	0	305	√	305
(0,1,1,1,0,0,1,0,0,0)	0	1980	√	1980	0	415	√	415
(0,1,1,1,0,1,0,0,0,0)	0	1400	√	1400	0	290	√	290
(0,1,1,1,1,0,0,0,0,0)	0	1600	√	1600	0	265	√	265
(0,1,1,1,1,0,0,0,0,1)	0	1700	√	1700	0	295	√	295
(0,1,1,1,1,0,0,0,1,0)	0	1850	√	1850	0	285	√	285
(0,1,1,1,1,0,0,1,0,0)	0	2020	×		0			
(0,1,1,1,1,0,1,0,0,0)	0	2300	×		0			
(0,1,1,1,1,1,0,0,0,0)	0	1720	√	1720	0	290	√	290
(0,1,1,1,1,1,0,0,0,1)	0	1820	√	1820	0	320	√	320

(0,1,1,1,1,1,0,0,1,0)	0	1970	√	1970	0	310	√	310
(0,1,1,1,1,1,0,1,0,0)	0	2140	×		0			
(0,1,1,1,1,1,1,0,0,0)	0	2420	×		0			
(0,0,1,0,0,1,1,1,0,1)	0	1840	√	1840	0	495	√	495

通过上表得出

最大容积:

(0,1,1,1,0,0,1,0,0,0)	0	1980	√	1980	0	415	√	415
-----------------------	---	------	---	------	---	-----	---	-----

此时的容积为 1980 毫升，价格之和为 415 元；

最大价格之和:

(0,0,1,0,0,1,1,1,0,1)	0	1840	√	1840	0	495	√	495
-----------------------	---	------	---	------	---	-----	---	-----

此时的容积为 1840 毫升，价格之和为 495 元；

II: 对价格与容量的比值 ($\Lambda_i = y_i / x_i$) 并为结果大小作序:

- (1) $\Lambda_1 = 15 / 200 = 0.075$ -----9
- (2) $\Lambda_2 = 45 / 350 = 0.128571$ -----8
- (3) $\Lambda_3 = 100 / 500 = 0.2$ -----5
- (4) $\Lambda_4 = 70 / 430 = 0.16279$ -----6
- (5) $\Lambda_5 = 50 / 320 = 0.15625$ -----7
- (6) $\Lambda_6 = 75 / 120 = 0.625$ -----1
- (7) $\Lambda_7 = 200 / 700 = 0.28571$ -----3
- (8) $\Lambda_8 = 90 / 420 = 0.212857$ -----4

(9) $2 \Lambda_9 = 20 / 250 = 0.08$ -----10

(10) $\Lambda_{10} = 30 / 100 = 0.3$ -----2

比值从大到小进行分配（当容量达最大时，价格之和也必然达最大）可得：

容量： $120+100+700+420+500=1840$ 毫升

价格： $75+30+200+90+100=495$ 元

经讨论：余下的容积不足再装任何一个物品，此时价格之和达最大，容积为 1840 毫升，价格之和为 495 元。

此值也可以从 I 得出，即下表：

价格之和达最大：

(0,0,1,0,0,1,1,0,1)	0	1840	√	1840	0	495	√	495
---------------------	---	------	---	------	---	-----	---	-----

五. 结果分析

通过对 I、II 进行分析（用红色锁定的部分因为超出了规定和要求，已经不能满足题目要求，所以作为不考虑部分）可得当时所带物品最多，并且价格之和最大，即达到了最大限度的携带，并且到达目的地后的花费最小。

具体分配方法为：

表一：（容量利用达最大）

(0,1,1,1,0,0,1,0,0,0)	0	1980	√	1980	0	415	√	415
-----------------------	---	------	---	------	---	-----	---	-----

表二：（价格之和达最大）

(0,0,1,0,0,1,1,0,1)	0	1840	√	1840	0	495	√	495
---------------------	---	------	---	------	---	-----	---	-----

最后得出最合理的分配携带方法表格论述为：

表述一：

旅行包	1000 毫升	1500 毫升	2000 毫升
具体物品	必带品：400、 450、150 毫升	必带品：300、250、 760、190 毫升	可带可不带： x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 、 x_6

结果具体语言叙述：1000 毫升的旅行包装 400、450、150 毫升的必带品；1500 毫升的旅行包装 300、250、760、190 毫升的必带品；2000 毫升的旅行包装可待也可不带的物品一 200 毫升、产品二 350 毫升、物品三 500 毫升、物品四 430 毫升、物品五 320 毫升、物品六 120 毫升。

表述二：

旅行包	1000 毫升	1500 毫升	2000 毫升
具体物品	必带品：400、 450、150 毫升	必带品：300、250、 760、190 毫升	可带可不带： x_3 、 x_6 、 x_7 、 x_8 、 x_{10}

结果具体语言叙述：1000 毫升的旅行包装 400、450、150 毫升的必带品；1500 毫升的旅行包装 300、250、760、190 毫升的必带品；2000 毫升的旅行包装可待也可不带的物品三 500 毫升、物品六 120 毫升、物品七 700 毫升、物品八 420 毫升、物品十 100 毫升。

所以有两种不同的分配方法：一、容量达最大；二、价格达最大。

六 参考文献

- [1], 田丰 钱颂迪 甘应爱 李梅生 郭耀煌 顾基发 陈秉正 李维铮
《运筹学》第三版 清华大学出版社, 2010 年 10 月
- [2] 杨启帆 方道元, 数学建模, 杭州: 浙江大学出版社, 1999 年
- [3] 李 涛 贺勇军, 应用数学篇, 北京: 电子工业出版社, 2000 年