人口模型

第一部分　指数增长模型

指数增长模型是由英国人口学家马尔萨斯于 1798 年最先提出的。这个模型认为，人口的增长将以几何级数增加。

一、基本假设

指数增长模型的基本假设是：人口的增长率是常数，或者说，单位时间内人口的增长量与当时的人口总量成正比。

二、变量和函数的定义

$x(t)$　　t 时刻的人口数量

x_0　　初始时刻的人口数量，即：$x(0)$

r　　人口增长率，依照假设，为常数

三、模型的建立

依照上面的假设和定义，显然有，在 t 到 $t+\Delta t$ 人口的增量为：

$$x(t+\Delta t)-x(t)=rx(t)\Delta t$$

上式两边同除以 Δt

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=rx(t)$$

取极限：

$$\frac{dx}{dt}=rx(t)$$

于是整个人口模型便可以用一个微分方程表示：

$$\frac{dx}{dt}=rx(t)$$

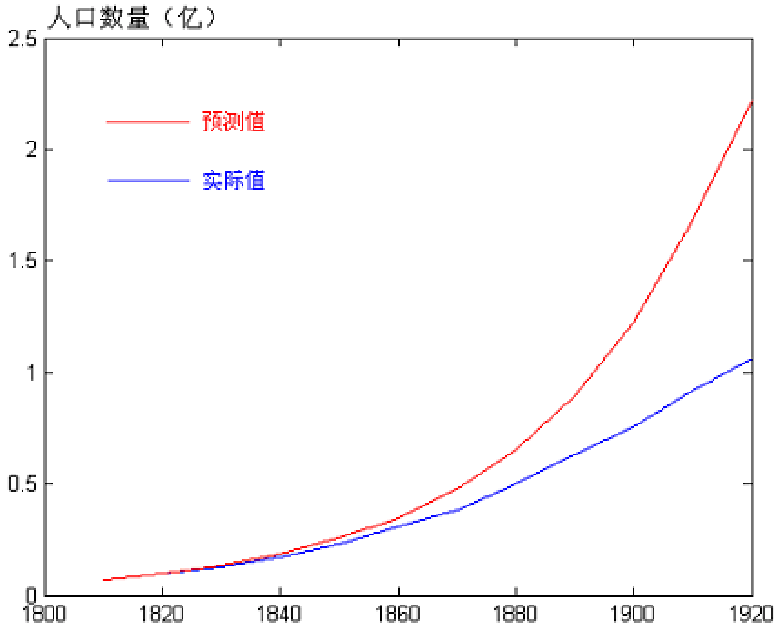
$$x(0)=x_0$$

容易解得：

$$x(t)=x_0e^{rt}$$

四、模型的检验

我们用美国的人口数据对该模型进行检验，做出下图，从图中可以看出，在人口发展的初期（1860 年以前），该模型计算所得的结果与实际数据相符得较好，但随着人口数量的增多，理论值与实际值出现了较大的偏差，在 1920 年以后误差竟高达 100%以上。



五、模型分析

指数型增长模型是建立在人口自然增长率 r 为常数的基础上的，这个假设在人口发展的初期是基本成立的，因为此时人口的数量较少，人口的发展处于自由增长状态，环境对人口增长的制约作用较小；而随着人口数量的增加，环境对人口的制约越来越大，使得人口的自然增长率不能再为一个常数，而是逐渐变小，这样，人口的数量的增长速度便没有指数模型预测的那么快，这也就是该模型在人口发展初期较为适用，而后来出现较大偏差的原因。

第二部分　阻滞增长模型

阻滞增长模型也叫做 Logistic 模型，是对马尔萨斯模型的改进，最初由 19 世纪比利时社会学家 P.F.Verhulst 提出的。该模型环境对人口数量有限制作用，一定环境所容纳的人口数量是一定的，人口不会无限制地增加，而是最终趋近某个常数。

一、基本假设

阻滞增长模型的基本假设是：人口的增长率不是常数，而是关于人口数量的线性递减函数。

二、变量和函数的定义

$r(x)$　　人口增长率，为 x 的线性递减函数，$r(x)=r-sx$

x_m　　环境所能容纳的最大人口数量，显然有 $r(x_m)=0$

r　　固有人口增长率，即：$r(0)=r$

三、模型的建立

依照上面的假设和定义，显然有：

$$r(x) = r - sx$$

$$r(0) = r$$

$$r(x_m) = 0$$

由上面的关系易推出：

$$r(x) = r\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$

将 $r(x)$ 的表达式代入指数增长模型中的微分方程中：

$$\frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)x$$

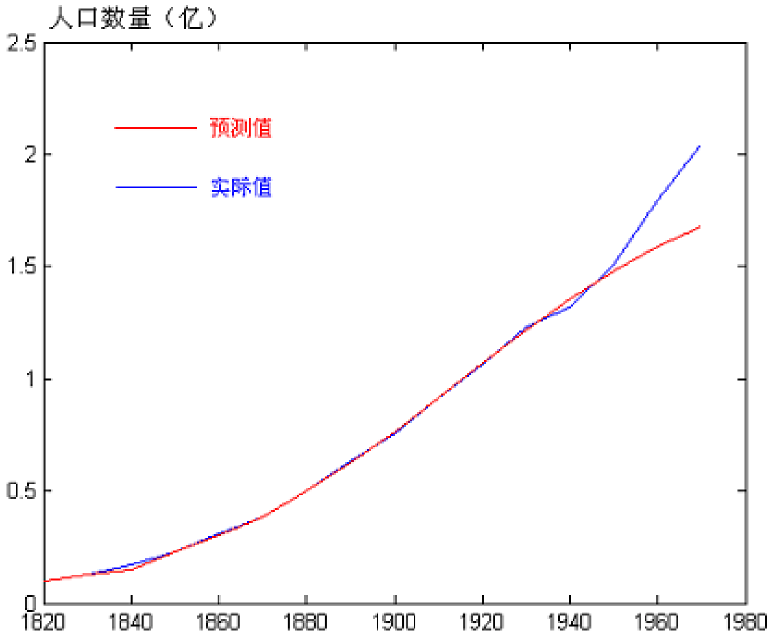
$$x(0) = x_0$$

解之得：

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

四、模型检验

我们仍然使用美国的人口数据对该模型进行检验，做出下图：



从图中可以看出，用该模型的预测结果和实际值相符得很好，只是在曲线的最后，预测值和实际值出现了一些偏差，因此，该模型的预测效果是相当好的。

五、模型分析

从上面的图中可以看出，由该模型计算的结果和实际符合地非常好。

但是，由于该模型建立在环境所能容纳的最大人口数量 x_m 为定值的情况下，而对于实际情况来说，x_m 的值是很难确定的，即使确定，x_m 的值也会因为情况的变化而发生改变。这也是在上图中，曲线的末端分叉的原因，因此，该模型虽然在理论上很好，但是其实用性不强。

第三部分　宋健的人口模型

针对我国的人口特点和复杂状况，宋健提出了新的人口模型，该模型通过详细的数学推导，得到一个偏微分方程，并由此衍生出了著名的“人口控制论”。宋健的人口模型是至今国际上广泛使用的人口模型，在人口预测和人口控制上有着广泛的应用。

一、基本假设

宋健的人口模型基于以下三项基本假设：

1. 把研究的社会人口当作一个整体，当作一个系统考虑；
2. 所有表征和影响人口变化的因素都是在整个社会人口平均意义下确定的；
3. 把时间的流逝、婴儿的出生、人口的死亡和居民的迁移看成是人口状态变化的全部因素。

二、变量和函数的定义

$N(t)$　　t 时刻该地区人口的总数

r_m　　人的最高寿命

$F(r,t)$　　人口函数

r 表示年龄，t 表示时间

该函数表示在 t 时刻该地区一切年龄小于 r 的人数

显然有，当 $r_2 > r_1$ 时，$F(r_2,t) \geqslant F(r_1,t)$

$P(r,t)$　　人口年龄分布密度函数

$$P(r,t) = \frac{\partial F}{\partial r}$$

该函数表示在 t 时刻，年龄为 r 的人数

显然有：$P(r,t) \geqslant 0 \quad P(r_m,t) = 0$

$$F(r,t) = \int_0^r P(\xi,t)d\xi$$

$$F(r_m,t)=\int_0^{r_m}P(\xi,t)d\xi=\int_0^{\infty}P(\xi,t)d\xi=N(t)$$

t时刻年龄在r_1到r_2之间的人口为：

$$F(r_2,t)-F(r_1,t)=\int_{r_1}^{r_2}P(\xi,t)d\xi$$

$M(r,t)$　　　　人口死亡分布函数

表示在t时刻该地区年龄为r的人的死亡数

$\mu(r,t)$　　　　相对死亡率

$$\mu(r,t)=\frac{M(r,t)}{P(r,t)}$$

三、模型的建立

t时刻年龄在$[r \quad r+\Delta r]$的人数为$P(r,t)\Delta r$

过了Δt时间后，死亡人数为：$\mu(r,t)P(r,t)\Delta r\Delta t$

另一部分没有死，他们活到了$t+\Delta t$时刻，此时他们的年龄处于区间$[r+\Delta r' \quad r+\Delta r+\Delta r']$，显然有$\Delta r'=\Delta t$

即在$t+\Delta t$时刻，年龄在$[r+\Delta r' \quad r+\Delta r+\Delta r']$中的人口数为：

$$P(r+\Delta r',t+\Delta t)\Delta r$$

于是下式显然成立：

$$P(r,t)\Delta r-P(r+\Delta r',t+\Delta t)\Delta r=\mu(r,t)P(r,t)\Delta r\Delta t$$

可写成：

$$\begin{aligned}&P(r+\Delta r',t+\Delta t)\Delta r-P(r,t+\Delta t)\Delta r+P(r,t+\Delta t)\Delta r-P(r,t)\Delta r\\&=-\mu(r,t)P(r,t)\Delta r\Delta t\end{aligned}$$

两边同除以$\Delta r\Delta t$，于是：

$$\frac{P(r+\Delta r',t+\Delta t)-P(r,t+\Delta t)}{\Delta r'}+\frac{P(r,t+\Delta t)-P(r,t)}{\Delta t}=-\mu(r,t)P(r,t)$$

取极限：

$$\frac{\partial P(r,t)}{\partial r}+\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}=-\mu(r,t)P(r,t)$$

初始条件：

$P(r,0)=P_0(r)$　　　　$P_0(r)$为初始时刻的人口密度

边界条件：

$P(0,t)=\varphi(t)=u(t)N(t)$ $\qquad$ $u(t)$ 为相对出生率

综上便得到了人口模型的微分方程模型

当 $\mu(r,t)$ 不依赖于 t，仅依赖于 r 时，可解得：

$$P(r,t)=\begin{cases} P_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^{r}\mu(\rho)d\rho} & 0<t<r \\ \varphi(t-r)e^{-\int_0^{r}\mu(\rho)d\rho} & r<t \end{cases}$$

四、移民问题

$m(r,t)\Delta r\Delta t$ 表示年龄在 $\left[r \quad r+\Delta r\right]$ 中的人，在 $\left[t \quad t+\Delta t\right]$ 得移入数，则：

$$\frac{\partial P(r,t)}{\partial r}+\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}=-\mu(r,t)P(r,t)+m(r,t)$$

五、人口的平均寿命

假设在 t 时刻，出生了 s 个婴儿，我们来计算 t 时刻的人口寿命：

死亡人数	年龄
$s\mu(0,t)$	0
$[s-s\mu(0,t)]\mu(1,t)$	1
$[s-s\mu(0,t)-[s-s\mu(0,t)]\mu(1,t)]\mu(2,t)$	2
$\vdots$	$\vdots$

以年龄作为权值进行加权求和，便可得到人口的平均年龄 $D(t)$

六、老龄化问题

社会人口的平均年龄：$A(t)=\dfrac{\int_0^{r_m}P(r,t)dr}{N(t)}$

定义老龄化指数：$\omega(t)=\dfrac{A(t)}{D(t)}$

七、性别比例问题

两个事实：

1. 初生男婴的比例为51.5%，初生女婴的比例为48.5%
2. 男性的平均寿命＜女性的平均寿命

所以平均下来，社会中男女的比例几乎为1∶1

八、生育模式问题

为了研究生育模式问题，我们先来定义几个函数：

$k(r,t)$——女性在人口中所占的比例

$b(r,t)$——t 时刻平均每个 r 岁的女性的生育数

$[r_1 \quad r_2]$——育龄区

那么在 t 时刻，出生的婴儿总数为：

$$f(t)=\int_{r_1}^{r_2} b(r,t)k(r,t)P(r,t)dr$$

令：$b(r,t)=\beta(t)h(r,t)$　　　①

其中，$\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)dr=1$

那么将①式两边积分：

$$\int_{r_1}^{r_2} b(r,t)dr=\int_{r_1}^{r_2} \beta(t)h(r,t)dr=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)dr=\beta(t)$$

$\beta(t)$ 的意义：一个女性一生的总生育数

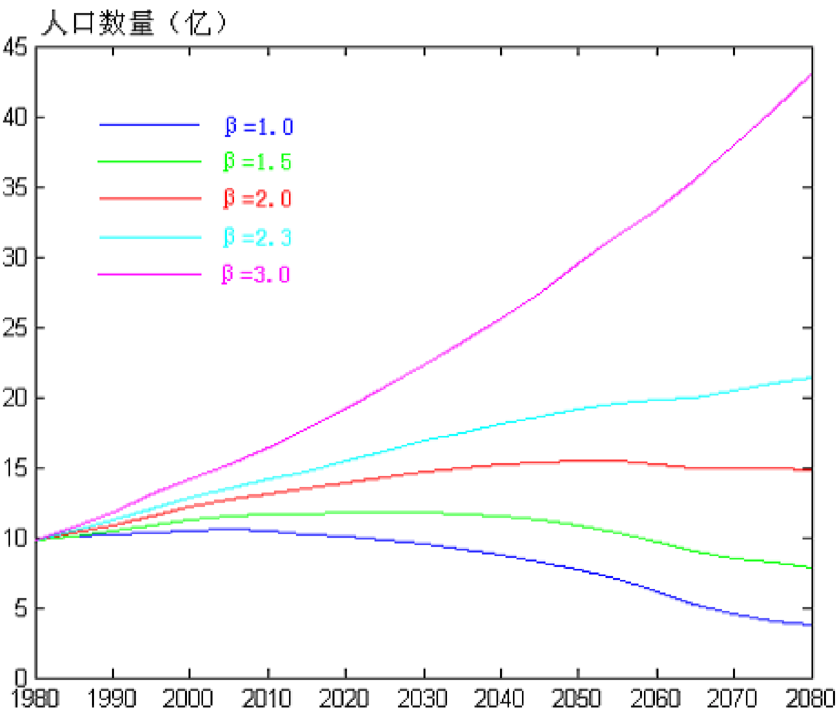
$h(r,t)$ 的意义：一个女性在 r 岁时的生育概率

如果 $\beta(t),h(r,t)$ 都与时间无关，则：

$$f(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)k(r,t)P(r,t)dr=\beta\int_{r_1}^{r_2} h(r)k(r,t)P(r,t)dr$$

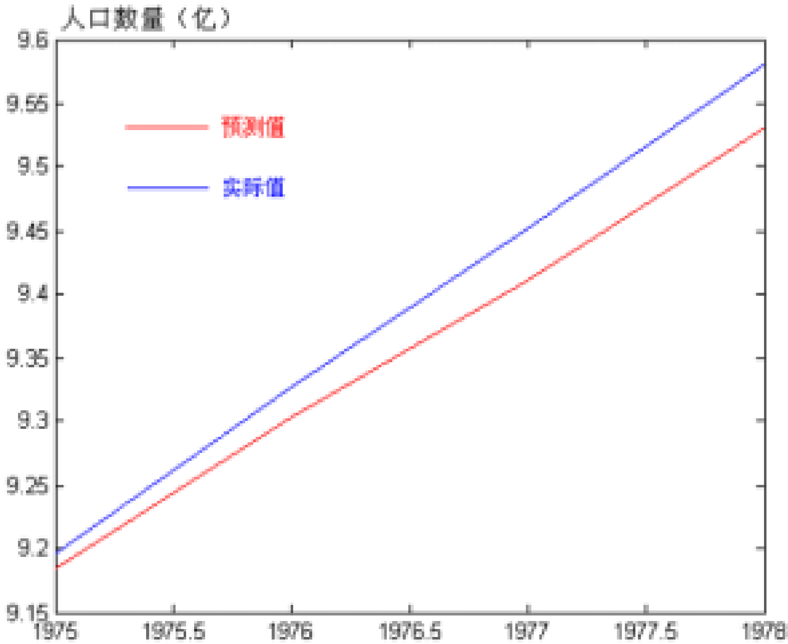
在结合死亡率，便可算出人口增长率。

结合我国的情况，我们将人口的数量随生育模式变化的趋势做成下图，从而直观的反映生育模式对人口数量的影响：



九、模型的检验

运用该模型对我国的人口进行预测，下图为预测结果和实际的对比：



十、模型分析

该模型考虑了诸多因素，对人口模型进行了详尽的描述，因此对人口的预测也很精细，从上图看出，其对人口的统计与实际相比误差只有 1%，鉴于人口普查的误差也在 1%左右，因此，该模型是相当准确的。