第20卷 第5期
2003年03月

工 程 数 学 学 报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol.20 No.5
Mar. 2003

文章编号:1005-3085(2003)05-0100-07

# 彩票方案的优选模型

洪善艳, 周 姝, 刘梅娟
指导老师: 刘琼荪
(重庆大学,重庆 400044)

编者按:本文的特点是:1.在构造方案合理度的过程中考虑了奖项设置、奖金、总中奖概率等因素,对每一因素确定一个标准值,定义其对合理度的影响力,且标准值的确定采用了向量取模的方法,有一定的合理性;2.在层次分析建模中,同层元素之间不应存在太大的联系,本文的层次结构较合理;3.对优化模型约束条件的分析较仔细,提出了各因素的浮动区间概念,有新意。不足之处有:没有考虑一等奖的中奖概率对合理性的影响;各因素对合理性的影响只考虑线性的;符号的使用有些不够规范。

摘 要:影响彩票中奖的主要因素有中奖率、奖金额的设置、彩票的规则对彩民的吸引力等。本文对各种因素进行了综合分析,建立了评价彩票发行方案合理性的目标函数,即度量各种因素对彩民吸引力程度的函数——合理度 G,并由层次分析法得到模型中涉及到的各因素的权重值 $w_j$ 和各种因素的标准值 $C_j$,通过 Matlab 软件编程计算,评价出给定29种彩票方案的合理性,同时还设计出了更好的方案。

关键词:层次分析;合理度
分类号: AMS(2000) 90C05　　中图分类号: O221.1　　文献标识码: A

## 1 问题重述(略)

## 2 假设和符号说明

假设

1) 彩票形式多种多样,在此问题中,我们仅讨论"传统型"和"乐透型"两种;

2) 假定各个不同方案均是在公正公平的原则下实施,而且彩民购买和对奖的方便程度相同;

符号说明:

$G$:合理度,用来评价彩票发行方案合理性的目标函数;

$h_j$:各种因素对彩票合理度 $G$ 的影响力;

$w_j$:各种因素对彩票合理度 $G$ 的贡献权重;

$P_i$:各个奖项的中奖概率;

$R_i$:各个奖项 $i$ 的设置及奖金(高项奖 $R_i$ 为比例值,低项奖 $R_i$ 为金额值);

$P_{和}$:彩票中奖的概率总和;

$C_i$:影响合理度的每一种因素的标准值;

$I$:彩票方案中设置的最低级奖项,也就是奖项数;

$I'$:高项奖的奖项数;

$A$:合理度的几个影响因素通过两两比较得到的判断矩阵;

$\lambda_{max}$:判断矩阵 $A$ 的最大特征值;

$C.I.$:判断矩阵 $A$ 的一致性指标。

## 3 问题分析和模型建立

1) 各种奖项的概率计算 (略)

2) 模型建立

模型 1

彩票的发行方案包括彩票类型(有传统型和乐透型,乐透型又分单项型和复合型),彩票总数码、中奖基本号码及特别号码的设置以及奖项、奖金额的设置,这些设置又直接影响到彩票方案的中奖概率和,另外,彩票方案的奖项、金额设置以及中奖概率和又是吸引彩民购买彩票的关键因素。为了评价彩票发行方案的合理性,设定一目标函数值 $G$,称为合理度,$G$ 值越高说明彩票方案越合理。我们认为高项奖的奖金比例分配、低项奖的奖金金额和彩票方案的中奖概率和是影响彩票方案合理性的最直接因素。因此,合理度 $G$ 的计算与以下因素有关:(1) 彩票方案中各个奖项 $i$ 的设置及奖金 $R_i$($i = 1,2,\cdots,I$,$I$ 为彩票方案中设置的最低级奖项,也就是奖项数,$I'$ 为高项奖的奖项数,高项奖中 $R_i$ 为比例值,低项奖中 $R_i$ 为金额值),(2) 彩票中奖的概率总和 $P_{和}$,这与彩票方案所采用的中彩类型和奖项设置有关。我们用下面的式子形象的表示合理度 $G$ 和各个因素的关系模型

$$G = f(R_1, R_2, L, R_I, R) \tag{1}$$

式子中各因素不是简单的相加关系,它们彼此间的量纲不同,为了将各种因素的量纲统一起来寻求计算合理度 $G$ 的目标函数,现作如下考虑:

就每一种因素设定一个标准值 $C_i$,将该种因素值 $R_i$ 或 $P_{和}$ 和相应标准值 $C_i$ 的比值 $\frac{R_i}{C_i}$ $\frac{P}{C_i}$ 作为该种因素 $R_i$ 或 $P_{和}$ 对彩票方案合理度目标函数的影响力 $h_i$,即

$$h_i = \frac{R_i}{C_i} \quad \frac{P}{C_i}, \qquad i = 1,2,\cdots,I \tag{2}$$

彩票方案合理度的目标函数定义为各种因素影响力 $h_i$ 加权平均和。

由于各类不同的彩民对上述各种不同因素的取舍不同,那么各种因素对合理度 $G$ 的值的贡献也不同,设置各个因素对合理度 $G$ 的贡献权重为:$W = (w_1, w_2, \cdots, w_I, w)$,由此得到确切的评价彩票方案合理度 $G$ 目标函数

$$G = W^T H = (w_1, w_2, \cdots, w_I, w)^T (h_1, h_2, \cdots, h_I, h) \tag{3}$$

模型中权重值 $w_j$ 通过层次分析法得到,各种因素的标准值 $C_j$ 可利用题目所给的数据通过向量的标准化得到。由于各种彩票方案的奖项、金额设置以及中奖概率和是已知的,因此可计算得到题中的所有方案的合理度 $G$,通过 $G$ 的大小比较确定出所有 29 种方案较为合理的方案。

模型 2

为了取得最合理彩票方案，要使得合理度 $G$ 的目标函数达到最大值，即

$$G = W^T H = (w_1, w_2, \cdots, w_I, w)^T (h_1, h_2, \cdots, h_I, h) \Rightarrow \max \tag{4}$$

在现实的彩票方案中，有以下的约束条件：

a.前面已经分析，彩票方案的中奖概率总和与彩票方案的发行类型 type、彩票总数码 $n$、中奖基本号码 $m$ 及特别号码的设置以及奖项 $I$ 的设置有关。所以不同类型 type 中奖概率和应该是 $n, m, i$ 等因素的函数，即

$$P_{和} = f(n, m, \text{type}, I) \tag{5}$$

b.高项奖的奖金比例和为1，所以模型中

$$\sum_i R_i = 1 \qquad i = 1, \cdots, I' \tag{6}$$

c.部分彩民热衷彩票，其心态是基于特大奖（一等奖）的诱惑，为了能够吸引这一部分彩民，方案必须使得一等奖的奖金要占高项奖总金额的大部分，设一等奖的奖金比例的合理区间为$[\alpha_1, \beta_1]$，通常，$0.5 < \alpha_1, \beta_1 \leqslant 1$，所以

$$R_1 \in [\alpha_1, \beta_1] \tag{7}$$

d.相应的，除一等奖以外的其他高项奖的奖金比例也在某一合理区间内，可表示为

$$R_i \in [\alpha_i, \beta_i], \qquad i = 2, \cdots, I' \tag{8}$$

e.要提高彩票方案的吸引力，就要提高彩票方案的中奖概率和，其最直接的方法就是增加奖项 $I$，每一个低项奖的奖金金额同样要处于某一合理区间$[c_i, d_i]$ $i$ 为低项奖奖项，允许低项奖的奖金金额为0，表示相应彩票方案中不设置该奖项。

$$R_i \in [c_i, d_i] \qquad i = I' + 1, \cdots, I \tag{9}$$

f.高一等奖项肯定要比低一等奖项的奖金金额高，这是显然的，由于高项奖和低项奖的量纲不一样，分两种情况处理，即

$$\begin{aligned} &R_i > R_{i+1}, \qquad i = 1, \cdots, I' - 1 \\ &R_i > R_{i+1}, \qquad i = I' + 1, \cdots, I - 1 \end{aligned} \tag{10}$$

g.模型1的假设，方案中奖项、奖金的设置以及中奖概率和与各因素对合理度 $G$ 的影响力存在以下关系

$$h_i = \frac{R_i}{C_i} \frac{P}{C_i}, \qquad i = 1, 2, \cdots, I \tag{11}$$

综上所述，建立取得最合理彩票发行方案的目标规划模型

$$\max G = W^T H = (w_1, w_2, \cdots, w_I, w)^T (h_1, h_2, \cdots, h_I, h)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} P \quad f(n, m, \text{type}, I) \\ \sum_i R_i = 1, \qquad i = 1, \cdots, I' \\ R_i \in [\alpha_i, \beta_i], \qquad i = 1, \cdots, I' \\ R_i \in [c_i, d_i], \qquad i = I' + 1, \cdots, I \\ R_i > R_{i+1}, \qquad i = 1, \cdots, I' - 1 \\ R_i > R_{i+1}, \qquad i = I' + 1, \cdots, I - 1 \\ h_i = \dfrac{R_i}{C_i} \quad \dfrac{P}{C_i}, \qquad i = 1, 2, \cdots, I \end{cases} \tag{12}$$

## 4　模型的求解

模型 1 的求解

根据前面建立的数学模型,我们可以得到确切的评价彩票方案合理度 $G$ 的目标函数

$$G = W^T H = (w_1, w_2, \cdots, w_l, w)^T (h_1, h_2, \cdots, h_l, h) \tag{13}$$

关键是计算影响度 $h_j$ 和权重 $w_j$。

1) 计算影响度 $h_j$

利用向量的单位化就可以求得每一种因素中的各个值的影响力

$$h_j = \frac{R_j}{C_j} = \frac{R_j}{\| R_j \|} \text{ 或者 } H_j = \frac{P}{C_j} = \frac{P}{\| P \|} \tag{14}$$

其中 $\| R_j \| = \sqrt{[R_j, R_j]} = \sqrt{R_{j1}^2 + R_{j2}^2 + \cdots + R_{jn}^2}$,是 $n$ 维向量 $R_j$ 的长度。

根据上述公式,即可得到任一个因素的标准值,从而得到各种因素对合理度 $G$ 的影响力 $h_j$。

计算过程中对数据的处理:

a) 分“传统型”和“乐透型”两种情况分别处理;

b) 23 组数据特殊,暂时取出不处理;

c) 设总的奖项数为 7,其中高项奖数为 3,对于某些方案为设全 7 个低项奖的情况,视其最后的几个最低未设的奖项奖金金额为 0。

2) 用层次分析法计算权重 $w_j$,具体的算法如下所述:

a) 在认真分析影响彩票方案合理度的各个直接因素(七种奖项)之间的关系后,我们建立彩票方案的递阶层次结构:

b) 对同一层次的各个元素关于上一层次中某一准则的重要性进行两两比较,构造两两比较判断矩阵。在构造两两比较判断矩阵的过程中,按 1 ~ 9 比例标度对重要性程度进行赋值。

对于任何一个准则,几个被比较元素通过两两比较就可以得到一个判断矩阵

$$A = (a_{ij})_{n \times n} \tag{15}$$

其中,$a_{ij}$ 就是 $u_i$ 与 $u_j$ 相对于 $C$ 的重要性的比例标度。

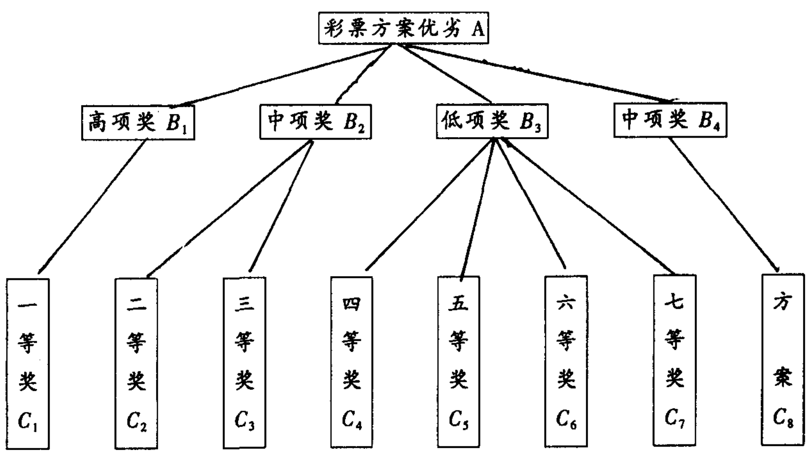


图 1　彩票方案递阶层次结构

c) 根据得到的判断矩阵,我们采用“特征根法”来求解判断矩阵中被比较元素的排序权

重向量。

对于本模型而言，我们认为高项奖比中奖面稍稍重要，中奖面比除高项奖外的中项奖稍稍重要，中项奖比低项奖稍重要，依据上述的层次分析方法，计算得到如下各个层次下的判断矩阵和其对应的排序权重向量、一致性指标：

表1 目标层的判断矩阵

| $A$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $w^{(2)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $B_1$ | 1 | 3 | 5 | 2 | 0.4729 |
| $B_2$ | 1/3 | 1 | 3 | 1/2 | 0.1699 |
| $B_3$ | 1/5 | 1/3 | 1 | 1/4 | 0.0729 |
| $B_4$ | 1/2 | 2 | 4 | 1 | 0.2844 |

$\lambda_{max} = 4.0511$

$C.I. = 0.0170$

$R.I. = 0.8900$

$C.R. = 0.0191$

$\lambda_{max} = 2$

$C.I. = 0$

$R.I. = 0$

$C.R. = 0$

表2 准则层 $B_2$ 的判断矩阵

| $B_2$ | $C_2$ | $C_3$ | $P_2^{(3)}$ |
|---|---|---|---|
| $C_2$ | 1 | 3 | 0.75 |
| $C_3$ | 1/3 | 1 | 0.25 |

表3 准则层 $B_3$ 的判断矩阵

| $B_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_6$ | $C_7$ | $P_3^{(3)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_4$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 0.4673 |
| $C_5$ | 1/2 | 1 | 2 | 3 | 0.2772 |
| $C_6$ | 1/3 | 1/2 | 1 | 2 | 0.1601 |
| $C_7$ | 1/4 | 1/3 | 1/2 | 1 | 0.0954 |

$\lambda_{max} = 4.0310$

$C.I. = 0.0103$

$R.I. = 0.8900$

$C.R. = 0.0116$

$C$ 层对 $A$ 的总排序 $W^{(3)} = (w_1^{(3)}, w_1^{(3)}, \cdots, w_8^{(3)})^T$ 可用下表计算得：

表4 合成排序

| C \ B | $w_1^{(2)} = 0.4729$ | $w_2^{(2)} = 0.1699$ | $w_3^{(2)} = 0.0729$ | $w_4^{(2)} = 0.2844$ | $W^{(3)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $P_1^{(3)}$ | $P_2^{(3)}$ | $P_3^{(3)}$ | $P_4^{(3)}$ | |
| $C_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0.4729 |
| $C_2$ | 0 | 0.75 | 0 | 0 | 0.1274 |
| $C_3$ | 0 | 0.25 | 0 | 0 | 0.0425 |
| $C_4$ | 0 | 0 | 0.4673 | 0 | 0.0341 |
| $C_5$ | 0 | 0 | 0.2772 | 0 | 0.0202 |
| $C_6$ | 0 | 0 | 0.1601 | 0 | 0.0117 |
| $C_7$ | 0 | 0 | 0.0954 | 0 | 0.0069 |
| $C_8$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.2844 |

实际上表4中得到的 $W^{(3)}$ 即为影响彩票方案合理度的各因素的权重向量 $W$。

根据多层一致性指标的计算方法

$$C.R.^{(k)} = \frac{C.I.^{(k)}}{R.I.^{(k)}} = \frac{(C.I._1^{(k)} \cdots, C.I._{n_{k-1}}^{(k)})W^{(k-1)}}{(R.I._1^{(k)}, \cdots, R.I._{n_{k-1}}^{(k)})W^{(k-1)}} \tag{16}$$

利用上面求得的各个层次的一致性比例，得到 $C.I.^{(3)} = 0.0116 < 0.1$，符合递阶层次结构在 3 层水平以上的所有判断具有整体满足一致性的标准，即所得的排序权重向量是合理的。

由此得到 $w_j$，$h_j$ 的值，根据公式(13) 计算出评价彩票方案合理度目标函数值如下表

表 5　“传统型”各方案合理度

| 序列号 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 合理度 $G$ | 0.2223 | 0.4120 | 0.4138 | 0.4243 |

表 6　“乐透型”各方案合理度

| 序列号 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 合理度 $G$ | 0.1655 | 0.1722 | 0.2594 | 0.2521 | 0.2521 | 0.2438 | 0.1562 | 0.1562 | 0.1534 | 0.1571 | 0.1523 | 0.1529 |
| 序列号 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 合理度 $G$ | 0.1497 | 0.2108 | 0.1510 | 0.2093 | 0.2227 | 0.2095 | 0.1627 | 0.1605 | 0.1965 | 0.2172 | 0.1568 | 0.1467 |

由表可知，对于“传统型”，4 号方案最优，对于“乐透型”，7 号方案最优，为 7/30。

模型 2 的求解：

以模型 1 的求解结果为前提，每一种因素的权重、标准值分别为模型 1 中计算得到的 $w_j$　$C_j$，模型 2 的未知变量比较多，其计算过程如下：

1) 先要确定各个决策变量的合理浮动区间，如各奖项的奖金设置及中奖概率和的浮动区间，其浮动区间的设置存在人为主观因素的影响，即彩票发行部门有权对浮动区间的范围进行修改，本文先从提供的方案中总结各变量的大致浮动范围，如表 7 所示：

表 7　变量浮动区间

| 变量 | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ | $R_6$ | $R_7$ | $P_{和}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 浮动区间 | [0.5,0.80] | [0.1,0.25] | [0.1,0.3] | [50,1000] | [20,100] | [5,50] | [2,10] | [0.01,0.03] |

2) 利用穷举法，让 $n$ 从 20 到 40，$m$ 从 3 到 8，步进为 1，遍历上表中未知变量的浮动范围，以求得最大合理度，即最优彩票发行方案。因为有较多的未知变量，计算量非常大，所以将因素分为高项奖和低项奖进行分段遍历搜索：先固定低项奖的金额值，让高项奖金额比例浮动；然后固定计算得到的高项奖金额比例，计算低项奖的金额。这样可以大大地减少计算量，加快计算速度。

3) 模型 2 的计算通过 Matlab 编程实现，对于不同的变量浮动范围，该模型都可以很快的得到有最大合理度的方案。

通过计算，求得彩票发行的最优方案，如表 8 所示 (抽奖方式同“乐透型单项式” 方案)：

表8 不同中奖面的最优方案

| $P_和$浮动区间 | [0.1,0.3] | | [0.3,0.4] | | [0.4,0.5] | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 单项式 | 复合式 | 单项式 | 复合式 | 单项式 | 复合式 |
| 最优方案 | 7/31 | 7 + 1/20 | 8/25 | 6 + 1/21 | 7/27 | 6 + 1/20 |
| $R_1$ | 0.75 | 0.65 | 0.75 | 0.65 | 0.75 | 0.65 |
| $R_2$ | 0.15 | 0.25 | 0.15 | 0.25 | 0.15 | 0.25 |
| $R_3$ | 0.10 | 0.10 | 0.10 | 0.10 | 0.10 | 0.10 |
| $R_4$ | 800 | 800 | 800 | 800 | 800 | 800 |
| $R_5$ | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| $R_6$ | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 |
| $R_7$ | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| $G$ | 0.1114 | 0.1000 | 0.1253 | 0.1276 | 0.1558 | 0.1512 |

不同的彩票发行部门对表7中的浮动范围有不同的取舍,我们可以修改上表8中的变量浮动范围,求得不同的最优方案:改变中奖面 $p_和$ 的浮动范围,其他变量同表7,计算结果如表8所示,从表8可知:适当提高中奖面 $p_和$ 的浮动范围,彩票发行方案更合理。

由上述分析可知,基于彩票发行单位的不同要求,有不同的变量浮动范围,可得出不同的最优方案。变量的约束条件可根据彩票发行单位的意愿决定,该模型可以很快为彩票发行部门求得不同约束条件下的最优方案。

## 参考文献:

[1] 王沫然.MATLAB6.0与科学计算[M].北京:电子工业出版社,2001
[2] 云舟工作室,MATLAB数学建模基础教程[M].北京:人民邮电出版社,2001
[3] 姜启源等.数学实验[M].北京:高等教育出版社,1999
[4] 梅长林,王宁,周家良.概率论和数理统计[M].西安:西安交通大学出版社,2001
[5] 王莲芬,许树伯.层次分析发引论[M].北京:中国人民大学出版社,1990

## The Model of Lottery Scheme 's Optimization

HONG Shan-yan, ZHOU Shu, LIU Mei-juan
Advisor: LIU Qiong-sun
(Chongqing University, Chongqing 400044)

**Abstract**: The major factors that affect winning a prize in a lottery are the probability, the setting of the bonus money, the attraction to people about the regulation of the lottery. This paper analyzes all kinds of factors, sets up an objective function, rationality $G$, which evaluates the rationality about the emission scheme of the lottery, that is, measures the attraction extent to people of various factors. Through AHP gets weightiness $w_j$ and standard value $C_j$. Then by matlab, calculates the value of the rationality about the 29 schemes, meanwhile designs a more perfect scheme.

**Keywords**: AHP; rationality