文章编号: 1001-7445(2003)增-0080-06

# 赛程安排的数学模型

卓 伟, 许世敏, 陈向月

(广西商专高等专科学校计算机与信息系, 广西 南宁 530003)

**摘要**: 对 2002 年全国大学生数学建模竞赛 D 题——赛程安排问题进行了分析, 构建了"逆时针轮转法"的数学模型, 提供了如何编制赛程的方法. 利用"逆时针轮转法"所编制的赛程的间隔场次数上限及其相应的评价指标分别就球队数为偶数和奇数的情况进行了讨论. 当球队数 $N$ ($N \geq 6$) 为偶数时, 得到间隔场次数上限为 $\frac{N}{2}$; 当球队数 $N$ ($N \geq 7$) 为奇数时, 间隔场次数上限为 $\frac{N+1}{2}$.

**关键词**: 数学模型; 逆时针轮转法; 间隔场次数上限; 极端性原则; 逆时针轮转法
**中图分类号**: O29 G642 **文献标识码**: A

## 1 问题提出

你所在的年级有 5 个班, 每班一支球队在同一块场地上进行单循环赛, 共要进行 10 场比赛. 如何安排赛程使对各队来说都尽量公平呢? 下面是随便安排的一个赛程: 记 5 支球队为 A, B, C, D, E, 在下表左半部分的右上三角的 10 个空格中, 随手填上 1, 2, …10, 就得到一个赛程, 即第 1 场 A 对 B, 第 2 场 B 对 C, …, 第 10 场 C 对 E. 为方便起见将这些数字沿对角线对称地填入左下三角.

这个赛程的公平性如何呢, 不妨只看看各队每两场比赛中间得到的休整时间是否均等. 表的右半部分是各队每两场比赛间相隔的场次数, 显然这个赛程对 A, E 有利, 对 D 则不公平.

| | A | B | C | D | E | 每两场比赛间相隔场次数 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | X | 1 | 9 | 3 | 6 | 1, 2, 2 |
| B | 1 | X | 2 | 5 | 8 | 0, 2, 2 |
| C | 9 | 2 | X | 7 | 10 | 4, 1, 0 |
| D | 3 | 5 | 7 | X | 4 | 0, 0, 1 |
| E | 6 | 8 | 10 | 4 | X | 1, 1, 1 |

从上面的例子出发讨论以下问题:

1) 对于 5 支球队的比赛, 给出一个各队每两场比赛中间都至少相隔一场的赛程.

2) 当 n 支球队比赛时, 各队每两场比赛中间相隔的场次数的上限是多少.

3) 在达到 2) 的上限的条件下, 给出 $n=8$, $n=9$ 的赛程, 并说明它们的编制过程.

4) 除了每两场比赛间相隔场次数这一指标外, 你还能给出哪些指标来衡量一个赛程的优劣, 并说明 3) 中给出的赛程达到这些指标的程度.

## 2 基本假设

假设 1: 每场比赛的天气是理想化的, 能够允许赛事连续进行, 没有中断.

收稿日期: 2003-06-20; 修订日期: 2003-08-28
作者简介: 卓 伟(1981-), 男, 贵港市人.

假设 2: 裁判对每一球队都公平
假设 3: 比赛场地都一样, 不分主客场
假设 4: 每天只安排一场比赛, 并且每场比赛的时间是规定的, 没有加时赛
假设 5: 举办方(组委会)或编程组织者不存在偏向于某支队的现象

## 3　符号说明

N: 表示球队的队数; A ……Z: 分别用于表示各队; X: 表示不参赛

## 4　初步分析

由于要考虑各队每两场比赛中间都至少间隔一场等因素, 若对 N 支球队一个个的安排赛程, 这样做繁琐, 人工计算量巨大, 而且短时间内不能完成 因此, 我们从不同的角度考虑, 先是"不考虑间隔时", 然后"考虑间隔, 但不考虑公平", 最后是"考虑间隔, 且考虑公平", 因此我们想了三个方案

## 5　模型的建立

(一) 问题一的解决: 5 支球队的比赛, 给出一个各队每两场比赛中间都至少相隔一场的赛程, 其上限为: 2

| | A | B | C | D | E | 每两场比赛间相隔场次数 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | X | 2 | 4 | 6 | 8 | 1, 1, 1 |
| B | 2 | X | 7 | 9 | 5 | 2, 1, 1 |
| C | 4 | 7 | X | 1 | 10 | 2, 2, 2 |
| D | 6 | 9 | 1 | X | 3 | 1, 2, 2 |
| E | 8 | 5 | 10 | 3 | X | 1, 2, 1 |

(二) 当 N 支球队比赛时, 各队每两场比赛中间相隔的场次数的上限是多少?

解决这个问题有三个方案:

方案一: 不考虑赛程安排的公平性, 且不考虑各队每两场比赛中间是否有间隔时, 求它的上限 利用极端性原则分析如下: 当球队数为 N 时, 总共要进行 $C_N^2$ 场比赛, 每个球队应该进行 $N-1$ 场比赛; 当把某一个球队的第一场比赛、第二场、……、第 $N-2$ 场比赛, 安排在总赛程的第一场至第 $N-2$ 场, 而把此球队的第 $N-1$ 场比赛安排在总赛程的最后一场时, 得到各队每两场比赛中间相隔的场次数的上限为: $C_N^2-(N-2)-1$, 可得表:

| N (队) | 最大的上限 | 比赛的场数 | 每队参赛场数 |
|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 10 | 4 |
| 6 | 10 | 15 | 5 |
| 7 | 15 | 21 | 6 |
| 8 | 21 | 28 | 7 |
| 9 | 28 | 36 | 8 |
| …… | …… | …… | …… |
| N | $C_N^2-(N-2)-1$ | $C_N^2$ | $N-1$ |

此方案对连续进行比赛的球队来说不利于运动员休息和技术发挥, 这是不公平的; 球队连续进行比赛的场次越多, 对该球队越不公平 为避免出现各队连续比赛的情况, 我们对方案一进行改进, 得方案二

方案二: 考虑各队每两场比赛中间都至少间隔一场, 求它的上限 分析如下:

①当 $N=0, 1$ 时, 没有意义;

②当 $N=2, 3, 4$ 时, 不能满足每两场比赛中间都至少间隔一场的条件;

例如: 当 $N=3$ 时: 各队都有连续比赛的情况, 做不到至少间隔一场, 见下表:

| | A | B | C | 每两场比赛间相隔场次数 |
|---|---|---|---|---|
| A | X | 1 | 3 | 1 |
| B | 1 | X | 2 | 0 |
| C | 3 | 2 | X | 0 |

例如: 当 $N = 4$ 时: 各队也都有连续比赛的情况, 做不到至少间隔一场, 见下表:

| | A | B | C | D | 每两场比赛间相隔场次数 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | X | 5 | 3 | 1 | 1, 1 |
| B | 5 | X | 2 | 4 | 1, 0 |
| C | 3 | 2 | X | 6 | 0, 2 |
| D | 1 | 4 | 6 | X | 2, 1 |

③当 $N = 5$ 时, 各队每两场比赛中间都至少间隔一场的最大上限是: 2

| | A | B | C | D | E | 每两场比赛间相隔场次数 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | X | 2 | 4 | 6 | 8 | 1, 1, 1 |
| B | 2 | X | 7 | 9 | 5 | 2, 1, 1 |
| C | 4 | 7 | X | 1 | 10 | 2, 2, 2 |
| D | 6 | 9 | 1 | X | 3 | 1, 2, 2 |
| E | 8 | 5 | 10 | 3 | X | 1, 2, 1 |

④当 $N \geq 6$ 时, 各队每两场比赛中间都至少间隔一场的间隔场次数的的上限= 参赛的总场数- $(N \times 2 + 4)$.

对于比赛球队 $N \geq 6$ 时, 每支球队都有 $(N - 1)$ 场比赛, 为了尽可能求出最大的上限, 现任取一个队 $A$, 把 $A$ 队的前 $(N - 2)$ 场, 安排在赛程中第一、第三、第五、…第 $[1+(N-3)2]$ 场, $A$ 队的第 $(N - 1)$ 场比赛排在赛程中的最后一场, $A$ 队的第 $(N - 2)$ 场与第 $(N - 1)$ 场间相隔的场次数为上限= $C_N^2 - [1+(N-3)\times 2] - 1 = C_N^2 - 2N + 4$.

例如: 当 $N = 8$ 时, 间隔场次数的上限= $28 - (8\times 2 - 4) = 16$

| | A | B | C | D | E | F | G | H | 每两场比赛间相隔场次数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | X | 1 | 28 | 3 | 11 | 5 | 7 | 9 | 1, 1, 1, 1, 1, 16 |
| B | 1 | X | 6 | 13 | 4 | 19 | 24 | 16 | 2, 1, 6, 2, 2, 4 |
| C | 28 | 6 | X | 23 | 8 | 14 | 20 | 2 | 3, 1, 5, 5, 2, 4 |
| D | 3 | 13 | 23 | X | 17 | 10 | 26 | 21 | 6, 2, 3, 3, 1, 2 |
| E | 11 | 4 | 8 | 17 | X | 22 | 15 | 25 | 3, 2, 3, 1, 4, 2 |
| F | 5 | 19 | 14 | 10 | 22 | X | 12 | 27 | 4, 1, 1, 4, 2, 4 |
| G | 7 | 24 | 20 | 26 | 15 | 12 | X | 18 | 4, 2, 2, 1, 3, 1 |
| H | 9 | 16 | 2 | 21 | 25 | 27 | 18 | X | 6, 6, 1, 2, 3, 1 |

此方案考虑了各队每两场比赛中间都至少相隔一场的条件, 它只是解决了方案一的间隔问题, 却没有考虑比赛安排的公平性, 这必然会使其他参赛队产生异议 为了避免这种情况, 我们对方案二进行改进, 得到方案三:

方案三: 考虑各队每两场比赛中间都至少相隔一场时让赛程安排尽可能公平的情况, 求它的上限

题目要求我们安排N 支球队的单循环赛程, 并使赛程对各队来说尽量做到公平. 要想做到公平, 衡量的指标之一是: 考虑各队每两场比赛之间得到的休整时间尽量均等、或是差距不大 为此, 采用"逆时针轮转法", 先将参加比赛的球队用字母(A、B、C 、……、Z) 等符号表示, 然后固定A 队, 按左边由上而下、右边由下而上(即逆时针转动) 排成完整的两列

为了确定比赛顺序, 要先排出比赛场次的顺序轮转表 经过我们的研究和推测, 得出了以下的结论:

(1) 当 $N$ 为偶数时, 各队每两场比赛之间相隔的场次数(较公平) 的上限分析如下:

①当 $N = 6$ 时, 总共比赛的次数是 $\frac{6\times 5}{2} = 15$ 场, 我们用 1、2、……、15 表示第 1 至 15 场, 如下图所

示:

6 个参赛队的单循环赛比赛场次顺序轮转表

| 第一轮（场） | 第二轮（场） | 第三轮（场） | 第四轮（场） | 第五轮（场） |
|---|---|---|---|---|
| A ——F 1 | A ——E 4 | A ——D 7 | A ——C 10 | A ——B 13 |
| B ——E 2 | F ——D 5 | E ——C 8 | D ——B 11 | C ——F 14 |
| C ——D 3 | B ——C 6 | F ——B 9 | E ——F 12 | D ——E 15 |

赛程表与相隔场次数表

| | A | B | C | D | E | F | 每两场比赛间相隔场次数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | X | 13 | 10 | 7 | 4 | 1 | 2, 2, 2, 2 |
| B | 13 | X | 6 | 11 | 2 | 9 | 3, 2, 1, 1 |
| C | 10 | 6 | X | 3 | 8 | 14 | 2, 1, 1, 3 |
| D | 7 | 11 | 3 | X | 15 | 5 | 1, 1, 3, 3 |
| E | 4 | 2 | 8 | 15 | X | 12 | 1, 3, 3, 2 |
| F | 1 | 9 | 14 | 5 | 12 | X | 3, 3, 2, 1 |

由上图所知, 各队每两场比赛之间相隔的场次数的最大间隔(上限)为: 3(场); 最小间隔(下限)为: 1(场);

如果两球队的总间隔场次数相等, 那么当最大间隔与最小间隔的差值越小时, 其公平性越合理(例如上图中的A 队和D 队相比, 总间隔场次数都是 2+ 2+ 2+ 2= 1+ 1+ 3+ 3= 8, 但A 队的最大间隔与最小间隔的差值比D 队的小, 所以A 队比D 队更公平). 因此, 这种方案与方案二的方法相比更合理

如果两球队的总间隔场次数相等, 那么最大间隔与最小间隔的差值越小时, 其公平性越合理 因此, 这种方案与方案二的方法相比更合理

因此, 由①的讨论可推测得出规律: 当$N$ 为偶数时, 各队每两场比赛之间相隔的场次数(较公平时)的上限为: $\frac{N}{2}$(场).

(2) 当$N$ 为奇数时, 各队每两场比赛之间相隔的场次数(较公平)的上限分析如下:

① 不考虑每队的轮空, 每队则要进行$N-1$ 场比赛 (轮空: 指的是增加"$O$"号球队, 与其他球队比赛, 但实际是没有比赛的 )

②如果考虑每队的轮空, 每队则要进行$N$ (其实还是进行$N-1$ 场, 只不过我们把轮空的"$O$"当作一场, 因此要进行$N-1+1$) 场, 这样我们还是运用"逆时针轮转法"排列 规则如前面所示, 只是最后用"$O$"补成完整的两列

如果两球队的总间隔场次数相等, 那么最大间隔与最小间隔的差值越小时, 其公平性越合理 因此, 这种方案与方案二的方法相比更合理

a. 当$N=7$ 队时, 总共比赛的次数是$\frac{8\times7}{2}=28$ 场, 我们用 1、2、……、28 表示第 1 至 28 场, 由下图所示:

7 支参赛队的单循环赛比赛场次顺序轮转表

| 第一轮(场) | 第二轮(场) | 第三轮(场) | 第四轮(场) | 第五轮(场) | 第六轮(场) | 第七轮(场) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A ——O 1 | A ——G 5 | A ——F 9 | A ——E 13 | A ——D 17 | A ——C 21 | A ——B 25 |
| B ——G 2 | O ——F 6 | G ——E 10 | F ——D 14 | E ——C 18 | D ——B 22 | C ——O 26 |
| C ——F 3 | B ——E 7 | O ——D 11 | G ——C 15 | F ——B 19 | E ——O 23 | D ——G 27 |
| D ——E 4 | C ——D 8 | B ——C 12 | O ——B 16 | G ——O 20 | F ——G 24 | E ——F 28 |

赛程表及相隔场次数

| | A | B | C | D | E | F | G | O | 每两场比赛间相隔场次数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | X | 25 | 21 | 17 | 13 | 9 | 5 | 1 | 3, 3, 3, 3, 3, 3 |
| B | 25 | X | 12 | 22 | 7 | 19 | 2 | 16 | 4, 4, 3, 2, 2, 2 |
| C | 21 | 12 | X | 8 | 18 | 3 | 15 | 26 | 4, 3, 2, 2, 2, 4 |
| D | 17 | 22 | 8 | X | 4 | 14 | 27 | 11 | 3, 2, 2, 2, 4, 4 |
| E | 13 | 7 | 18 | 4 | X | 28 | 10 | 23 | 2, 2, 2, 4, 4, 4 |
| F | 9 | 19 | 3 | 14 | 28 | X | 24 | 6 | 2, 2, 4, 4, 4, 3 |
| G | 5 | 2 | 15 | 27 | 10 | 24 | X | 20 | 2, 4, 4, 4, 3, 2 |
| O | 1 | 16 | 26 | 11 | 23 | 6 | 20 | X | 4, 4, 4, 3, 2, 2 |

由上图所知, 各队每两场比赛之间相隔的场次数的最大间隔(上限)为: 4(场); 最小间隔(下限)为: 2(场);

当球队的间隔场次的总和相等, 最大间隔与最小间隔的差值越小时, 其公平性越合理 因此, 这种方案与方案二的方法相比更合理

因此, 由 a 的讨论可推测得出规律: 当$N$ 为奇数时, 各队每两场比赛之间相隔的场次数(较公平时)的上限为: $\frac{N+1}{2}$(场).

(三) 达到 2) 的上限的条件下, 给出 $n=8$, $n=9$ 的赛程, 并说明它们的编制过程

问题 3) 的解决: 依据上面的方案三的算法可得到它们较合理的赛程, 编制过程参照方案三(略)

当$N=8$ 时, 依据方案三, 得到赛程表如下:

8 支参赛队的单循环赛比赛场次顺序轮转表

| 第一轮(场) | 第二轮(场) | 第三轮(场) | 第四轮(场) | 第五轮(场) | 第六轮(场) | 第七轮(场) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A —H 1 | A —G 5 | A —F 9 | A —E 13 | A —D 17 | A —C 21 | A —B 25 |
| B —G 2 | F —H 6 | E —G 10 | D —F 14 | C —E 18 | B —D 22 | C —H 26 |
| C —F 3 | B —E 7 | H —D 11 | C —G 15 | B —F 19 | H —E 23 | D —G 27 |
| D —E 4 | D —C 8 | B —C 12 | B —H 16 | H —G 20 | G —F 24 | F —E 28 |

赛程表及相隔场次数表

| | A | B | C | D | E | F | G | H | 每两场比赛间相隔场次数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | X | 25 | 21 | 17 | 13 | 9 | 5 | 1 | 3, 3, 3, 3, 3, 3 |
| B | 25 | X | 12 | 22 | 7 | 19 | 2 | 16 | 4, 4, 3, 2, 2, 2 |
| C | 21 | 12 | X | 8 | 18 | 3 | 15 | 26 | 4, 3, 2, 2, 2, 4 |
| D | 17 | 22 | 8 | X | 4 | 14 | 27 | 11 | 3, 2, 2, 2, 4, 4 |
| E | 13 | 7 | 18 | 4 | X | 28 | 10 | 23 | 2, 2, 2, 4, 4, 4 |
| F | 9 | 19 | 3 | 14 | 28 | X | 24 | 6 | 2, 2, 4, 4, 4, 3 |
| G | 5 | 2 | 15 | 27 | 10 | 24 | X | 20 | 2, 4, 4, 4, 3, 2 |
| H | 1 | 16 | 26 | 11 | 23 | 6 | 20 | X | 4, 4, 4, 3, 2, 2 |

(四) 衡量一个赛程的优劣, 除了两场比赛间相隔场次数这一指标外, 我们还想到了其它指标来衡量一个赛程的优劣: 就是当两球队的总间隔场次数相等时, 最大间隔与最小间隔的差值越小, 其公平性越合理

问题 3) 的赛程就是根据方案三的思想来编制, 即依据"当球队的间隔场次的总和相等时, 最大间隔与最小间隔的差值越小, 其公平性越合理 "来制定的

## 6 模型的评价

本模型成功的解决了赛程安排的问题

优点在于: 1. 通过三种方法的比较, 第三种方案极大地提高赛程安排的公平性合理性 2 第三种方

案采用的是"逆时针轮转法", 避免了赛程安排的盲目性

缺点在于: 第二种方案的推理过程不够严谨, 只是通过对N = 5, 6, 7, 8, 9, 10 的分析就得出N 为任意自然数的结论

## 参考文献:

[1] 全国体育学院教材委员会 篮球 [M]. 北京: 人民体育出版社, 1992

## Mathematical model for the arrangement of match schedule

ZHUO Wei, CHEN Xiang-yue, XU Shi-min

(Guangxi Commercial College, Nanning 530003, China)

**Abstract**: This paper analyses the arrangement of match schedule——a question from CUMCM'2002. By using the Contraratate Method, A mathematical model for the Match Schedule is set up. The different situations with even and odd team numbers is discussed. According to the Contraratate Method and the evaluated index, when the team number $n$ ($n \geq 6$) is even, the upper limit of the interval numbers of adjoining matches belonged to a team will be $\frac{N}{2}$; when it is odd, the upper limit will be $\frac{N+1}{2}$.

**Key words**: mathematical model; Contraratate Method; the upper limit of the interval numbers of adjoining matches belonged to a team

(责任编辑 张晓云)