

眼科病床的合理安排

摘 要

对于问题 1，我们建立了以排队长度（系统中等待入院的患者人数）、服务强度（单位时间服务率与患者到达率之比）、有无“饿死”现象、应变能力（模型应对就诊人数波动的稳定性）为指标的模型评价体系，完整、直观地评价了 FCFS 病床安排策略的优缺点。

对于问题 2，我们提出了 PR-TS（Priority-Timestamp，优先级-时间戳）策略：首先根据当天是否为最优入院期而对患者进行优先级标记，然后相同优先级患者通过“时间戳”长短安排入院。此策略通过减少患者从入院到手术的等待时间，增加了单位时间内治疗的人数，提高了病床资源的利用率。各项指标也充分显示了 PR-TS 的优越性。

对于问题 3，根据目前住院病人和等待住院病人的情况，分别估算出各种病平均每天出院的人数，据此计算出目前等待住院病人全部入住所需的天数，也就是当前此种病人需要等待入住的大致天数，由于 PR-TS 方案只允许病人在其对应的最优入院日期入住，由此可计算出入住日期的一个大致的区间。

对于问题 4，以 PR-TS 策略安排周六、周日无手术的情况，发现排队长度波动上升，即排队等待入院的人数越来越多，所以必须改变周一、周三治疗白内障这一安排。我们分别讨论了周二、周四和周三、周五治疗白内障的情况。经验证，两种方案均可实施。

对于问题 5，若要系统内患者平均逗留时间最短，则需使患者从门诊到手术前的等待时间最短。据此，在保证门诊到手术时间最短条件下，分别计算出各种病所需的最小病床数，再根据数据波动和条件苛刻度对病床分配进行微调。由此得到结论：白内障双眼 16 张床，白内障单眼 13 张床，青光眼 11 张床，视网膜疾病 31 张床，伤员 8 张床。

在每一问的求解过程中，我们都采用 MATLAB 根据所建模型进行模拟仿真。

关键词：PR-TS 病床安排 优先级 时间戳 逗留时间 等待时间

一. 问题重述

某医院眼科门诊每天开放，住院部共有病床 79 张。该医院眼科手术主要分四大类：白内障、视网膜疾病、青光眼和外伤。

白内障手术较简单，而且没有急症。目前该院是每周一、三做白内障手术，此类病人的术前准备时间只需 1、2 天。做两只眼的病人比做一只眼的要多一些，大约占到 60%。如果要做双眼是周一先做一只，周三再做另一只。

外伤疾病通常属于急症，病床有空时立即安排住院，住院后第二天便会安排手术。

其他眼科疾病比较复杂，有各种不同情况，但大致住院以后 2-3 天内就可以接受手术，主要是术后的观察时间较长。这类疾病手术时间可根据需要安排，一般不安排在周一、周三。由于急症数量较少，建模时这些眼科疾病可不考虑急症。

该医院眼科手术条件比较充分，在考虑病床安排时可不考虑手术条件的限制，但考虑到手术医生的安排问题，通常情况下白内障手术与其他眼科手术（急症除外）不安排在同一天做。当前该住院部对全体非急症病人是按照 FCFS (First come, First serve) 规则安排住院，但等待住院病人队列却越来越长。试通过数学建模来帮助解决该住院部的病床合理安排问题，以提高对医院资源的有效利用。

问题一：试分析确定合理的评价指标体系，用以评价该问题的病床安排模型的优劣。

问题二：试就该住院部当前的情况，建立合理的病床安排模型，以根据已知的第二天拟出院病人数来确定第二天应该安排哪些病人住院。并对你们的模型利用问题一中的指标体系作出评价。

问题三：作为病人，自然希望尽早知道自己大约何时能住院。能否根据当时住院病人及等待住院病人的统计情况，在病人门诊时即告知其大致入住时间区间。

问题四：若该住院部周六、周日不安排手术，请你们重新回答问题二，医院的手术时间安排是否应作出相应调整？

问题五：有人从便于管理的角度提出建议，在一般情形下，医院病床安排可采取使各类病人占用病床的比例大致固定的方案，试就此方案，建立使得所有病人在系统内的平均逗留时间（含等待入院及住院时间）最短的病床比例分配模型。

二. 模型假设

1. 假设每天按照先出院，再入院，最后问诊的顺序安排病人。当日患者最早也要在次日住院，不能当日住院。

2. 假设每天的问诊伤员人数都小于前一天的出院人数。（可由 Excel 对先前医院提供的数据进行统计得出）

3. 假设患者从问诊到出院的整个过程中，不会中途离开放弃治疗。

三. 名词约定及符号说明

3.1 名词约定

时间戳： 未入院的患者从问诊到某个最优入院期的等待时间。

饿死现象： 采用某种策略安排病床，一些病人问诊之后总也无法被安排入院，则会产生饿死。

术前时间： 患者从问诊到手术治疗的时间。

占床时间： 患者从入院到出院治疗的时间。

3. 2 符号说明

i 患者患病的种类。其中 $i=1$ 代表白内障双眼； $i=2$ 代表白内障单眼；
 $i=3$ 代表青光眼； $i=4$ 视网膜疾病； $i=5$ 代表外伤

T_{i0} 某患者从就诊到入院的等待时间。

T_{i1} 某患者从入院到第一次手术的等待时间

T_{i2} 术后恢复时间，即某患者第一次手术到出院的等待时间

T_s 服务时间（占床时间），即从入院到出院的时间。

T_w 逗留时间，即从问诊到出院的时间。

t_0 患者就诊时间

t_1 患者入院时间

t_2 患者第一次手术时间

t_3 患者出院时间

\bar{n} 医院平均单位时间（每天）治疗的患者人数

s 医院的床位数

四．主要参数及评价指标

排队长（ L_i ）： 系统中问诊后仍在等待入院的总人数

平均到达率（ λ_i ）： 单位时间（每天）平均到达的第 i 种病患者数^[1]

平均服务率（ μ_i ）： 单位时间（每天）能完成看病的第 i 种病患者数（期望值）， $1/\mu_i$ 表示一个患者的平均服务时间，即从入院到出院的平均时间。

服务强度 (ρ_i): 平均服务率 μ_i 与平均到达率 λ_i 之比, 即 $\rho = \mu_i / \lambda_i$ 。表示单位时间内能被服务的第 i 种病患者的期望值与到达的期望值之比。

此参数是描述该系统等待住院病人排队长度 L_i 变化趋势的重要标志。如果 $\rho < 1$, 意味着医院的服务无法满足患者人数, 等待住院的队列会越来越长; $\rho = 1$, 队列长度趋于平衡; $\rho > 1$, 等待住院的队列长度越来越短。

入院前等待时间 (T_{i0}): 从心理学角度, 此时间患者最关心。入院前的等待时间是由服务强度与排队长共同决定的。

五. 模型建立

5. 1 相关数据分析

5. 1. 1 单位时间就诊人数拟合

泊松分布适合于描述单位时间内随机事件发生的次数。在本看病系统中, 一定时间内, 患第 i 种眼病的病患到医院问诊的人数也应分别服从泊松分布。下面对其分布规律进行统计, 并检验其泊松拟合优度^[2]。

根据医院提供的 2008 年 7 月 13 日-9 月 4 日这 61 天的就诊人数, 利用 Excel 进行统计, 各类眼病每日就诊人数的概率分布如图 1 所示。

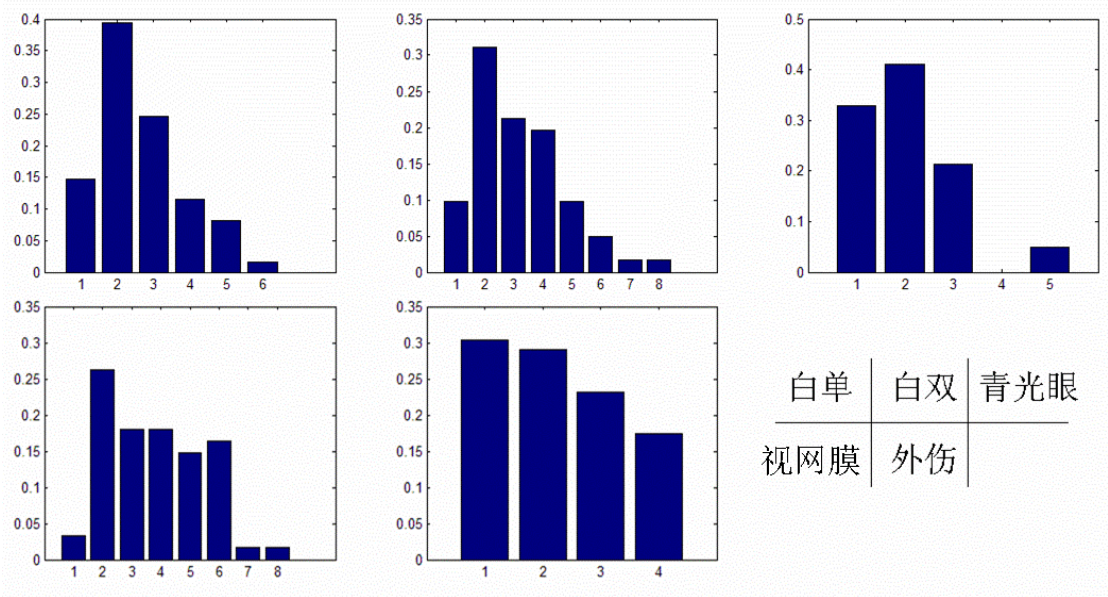


图 1 就诊人数的概率分布

a. 白内障双眼

如表 1 所示, 抽取工作时间共 61 天, 在此期间共到达白内障双眼患者 133

人，平均到达率为 2.18 人/天。对其进行 *Poisson* 分布的拟合优度检验， $\chi^2=12.592$ ，按 $P=0.05$ 标准，不拒绝 *Poisson* 分布假设，故可认为每天白内障双眼到达的患者流服从 $\lambda_1=2.18$ 的 *Poisson* 分布。

表 1 白内障双眼 *Poisson* 分布拟合优度检验

单位时间就诊 患者数 n	实际频数 f_n	$f_n \cdot n$	概率 p_n	$(f_n - T)^2 / T$
0	6	0	0.113	0.11569
1	19	19	0.247	1.026647
2	13	26	0.269	0.708226
3	12	36	0.195	0.000927
4	6	24	0.106	0.033584
5	3	15	0.046	0.013413
6	1	6	0.017	0.00132
7	1	7	0.007	0.76892
合计		133		2.668727

b. 白内障单眼

如表 2 所示，抽取工作时间共 61 天，在此期间共到达白内障单眼患者 100 人，平均到达率为 1.64 人/天。对其进行 *Poisson* 分布的拟合优度检验， $\chi^2=2.590<9.488$ ，按 $P=0.05$ 标准，不拒绝 *Poisson* 分布假设，故可认为每天白内障单眼到达的患者流服从 $\lambda_2=1.64$ 的 *Poisson* 分布。

表 2 白内障单眼 *Poisson* 分布拟合优度检验

单位时间就诊 患者数 n	实际频数 f_n	$f_n \cdot n$	概率 p_n	$(f_n - T)^2 / T$
0	10	0	0.194	0.284228
1	24	24	0.318	1.091783
2	15	30	0.261	0.053278
3	7	21	0.143	0.340333
4	5	20	0.058	0.604139
5	1	5	0.026	0.216517
合计		100		2.590279

c. 青光眼

如表 3 所示，抽取工作时间共 61 天，在此期间共到达青光眼患者 63 人，平均到达率为 1.03 人/天。对其进行 *Poisson* 分布的拟合优度检验， $\chi^2=6.895<7.815$ ，按 $P=0.05$ 标准，不拒绝 *Poisson* 分布假设，故可认为每天青

光眼到达的患者流服从 $\lambda_3=1.03$ 的 *Poisson* 分布。

表 3 青光眼 *Poisson* 分布拟合优度检验

单位时间就诊 患者数 n	实际频数 f_n	$f_n \cdot n$	概率 p_n	$(f_n - T)^2 / T$
0	20	0	0.357	0.145003
1	25	25	0.368	0.290124
2	13	26	0.189	0.187687
3	0	0	0.065	3.965
4	3	12	0.021	2.306761
合计		63		6.894575

d. 视网膜疾病

如表 4 所示,抽取工作时间共 61 天,在此期间共到达视网膜疾病患者 56 人,平均到达率为 2.79 人/天。对其进行 *Poisson* 分布的拟合优度检验, $\chi^2=10.521<12.592$, 按 $P=0.05$ 标准, 不拒绝 *Poisson* 分布假设, 故可认为每天视网膜疾病到达的患者流服从 $\lambda_4=2.79$ 的 *Poisson* 分布。

表 4 视网膜疾病 *Poisson* 分布拟合优度检验

单位时间就诊患者 数 n	实际频数 f_n	$f_n \cdot n$	概率 p_n	$(f_n - T)^2 / T$
0	2	0	0.061	0.79598
1	16	2	0.171	2.97323
2	11	4	0.239	0.878609
3	11	6	0.222	0.477165
4	9	8	0.155	0.021896
5	10	10	0.086	4.308143
6	1	12	0.04	0.849836
7	1	14	0.026	0.216517
合计		56		10.52137

e. 外伤

如表 5 所示,抽取工作时间共 61 天,在此期间共到达外伤患者 64 人,平均到达率为 1.05 人/天。对其进行 *Poisson* 分布的拟合优度检验, $\chi^2=2.182<7.378$, 按 $P=0.05$ 标准, 不拒绝 *Poisson* 分布假设, 故可认为每天外伤到达的患者流服从 $\lambda_5=1.05$ 的 *Poisson* 分布。

表 5 外伤 *Poisson* 分布拟合优度检验

单位时间就诊 患者数 n	实际频数 f_n	$f_n \cdot n$	概率 p_n	$(f_n - T)^2 / T$
0	21	0	0.35	0.005738
1	20	20	0.367	0.254512
2	16	32	0.193	1.51767
3	4	12	0.09	0.40439
合计		64		2.18231

每日就诊人数波动性分析：根据 *Poisson* 分布的性质， λ 等于其方差。则各类患者每日就诊人数的方差分别为 $\lambda_1=2.18$ ， $\lambda_2=1.64$ ， $\lambda_3=1.03$ ， $\lambda_4=2.79$ ， $\lambda_5=1.05$ 。可以看出，白内障双眼和视网膜疾病的每日就诊人数相对波动较大。

5. 1. 2 术后恢复时间分布规律

用 Excel 对 2008 年 7 月 13 日-9 月 4 日这 61 天病人术后恢复时间做以统计，结果如表 6 所示。

表 6 术后恢复时间分布规律

白内障双眼		白内障单眼		青光眼		视网膜疾病		外伤	
4	19.51%	2	29.17%	4	2.56%	5	2.91%	3	3.63%
5	64.63%	3	51.39%	5	0	6	3.88%	4	21.82%
6	15.83%	4	19.44%	6	7.69%	7	6.80%	5	18.18%
				7	25.64%	8	15.53%	6	16.36%
				8	30.77%	9	10.68%	7	20.00%
				9	20.51%	10	17.48%	8	9.09%
				10	5.13%	11	14.56%	9	5.45%
				11	2.56%	12	10.68%	10	5.45%
				12	5.13%	13	8.74%		
						14	4.85%		
						15	3.88%		
期望 4.9617		期望 2.9027		期望 8.0763		期望 10.0863		期望 6.0350	
方差 0.3520		方差 0.4766		方差 2.4292		方差 5.7861		方差 3.3061	

术后恢复时间波动性分析：比较各种疾病的方差，可明显看出视网膜疾病术后恢复时间波动性最大，然后依次为外伤、青光眼。

5.2 模型一 病床资源最优利用的床位安排模型

由于白内障双眼的第二次手术属于第一次手术到出院的时间范围内,为了简化模型,不考虑第二次手术的影响,将其并入术后恢复期内。由此,各种眼病的术后恢复期意义相同,均指第一次手术结束至出院的时间。

视网膜疾病、青光眼的手术日期、术后恢复时间等特点相同,为了简化模型,这里将两种病当作同一个类型处理。

5.2.1 优化目标的确立

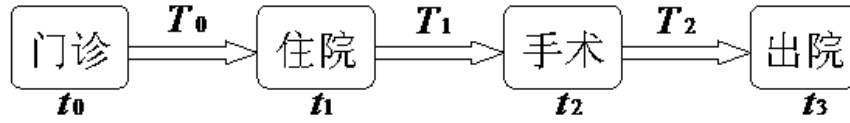


图2 患者就医过程

一个患者就医的过程如图2所示:患者于 t_0 时刻就诊,经过 T_0 的等待, t_1 时刻入院,在病床上经过 T_1 的术前准备, t_2 时刻进行手术,经过 T_2 的术后恢复期,于 t_3 时刻出院。即患者逗留时间为

$$T_w = T_0 + T_1 + T_2$$

从医院资源利用的角度出发,不需考虑患者从问诊到住院的等待时间 T_0 ,因为只有入院后的时间 T_1 、 T_2 才与病床的使用情况有关,其中占床时间 $T_s = T_1 + T_2$ 。

单位时间(每天)可以治疗的患者人数 \bar{n} 为 $\bar{n} = \frac{s \cdot 1}{T_s}$ 。其中 s 为医院的床位数,

\bar{T}_s 为每个患者平均的占床时间(单位:天)。

为了解决患者等待队列越来越长的问题,需要提高病床的使用效率,即提高单位时间内平均每床治疗的患者人数。根据公式可知,应尽可能缩小患者的占床时间 $T_s = T_1 + T_2$ 。然而术后恢复时间 T_2 是因患者而异的,而且是无法缩短的。

所以,优化目标为尽量减小患者从入院到手术的等待时间 T_1 ,由此确定各类患者安排床位的优先级。

5. 2. 2 入院到手术的等待时间 T_1 分析

白内障单眼、白内障双眼、视网膜疾病、青光眼和外伤的术前准备时间各异，而且手术的日期各有特点，这些都将影响患者从入院到手术的等待时间 T_1 的分布。下面进行具体分析最优入院时间。

● 白内障双眼

白内障手术较简单，而且没有急症。目前该院是每周一、三做白内障手术，此类病人的术前准备时间只需 1、2 天。如果要做双眼是周一先做一只，周三再做另一只。不能出现周三做一只，下周一再做一只的情况。所以无论患者是哪一天来住院，他都只能等到下周一做手术，由此可得到表 7。

表 7 白内障双眼入院时间与术前等待时间

入院日期 t_1	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
等待天数 T_1	7	6	5	4	3	2	1
手术日期 t_2	周一	周一	周一	周一	周一	周一	周一

由表可见，假如某患者本周一入院，由于术前准备时间需 1、2 天，做双眼是周一先做一只，周三再做另一只，他只能等待七天，到下周一再手术。而本周日入院的患者也于下周一手术。周一入院的患者多等待的六天实际上是无意义的，这六天可以分配给其他需要入院手术的患者。如此，如果非周日入院，该床位的使用效率将下降。

所以为了减小入院到手术的等待时间 T_1 ，应尽量安排白内障双眼的患者于每个周日入院，此时最小等待时间 $T_{11}=1$ 。

● 白内障单眼

白内障单眼手术每周一、三都可以做，此类病人的术前准备时间只需 1、2 天。

表 8 白内障单眼入院时间与术前等待时间

入院日期 t_1	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
等待天数 T_1	2	1	5	4	3	2	1
手术日期 t_2	周三	周三	周一	周一	周一	周一	周一

由表可见，为了减小入院到手术的等待时间 T_1 ，应尽量安排白内障单眼的患

者于周二或周日入院，此时最小等待时间 $T_{21}=1$ 。

● 视网膜疾病、青光眼

视网膜疾病、青光眼大致住院以后 2-3 天内就可以接受手术。这类疾病手术时间可根据需要安排，但不能安排在周一、周三。由于急症数量较少，建模时这些眼科疾病可不考虑急症。

表 9 视网膜疾病、青光眼入院时间与术前等待时间

入院日期 t_1	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
等待天数 T_1	3	2	2	2	2	3	2
手术日期 t_2	周四	周四	周五	周六	周日	周二	周二

由表可见，应尽量安排视网膜疾病、青光眼的患者于周二、周三、周四、周五或周日入院，此时从入院到手术的最小等待时间 $T_{31}=T_{41}=2$ 。

● 外伤

外伤疾病通常属于急症，住院后第二天便会安排手术。

表 10 外伤入院时间与术前等待时间

入院日期 t_1	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
等待天数 T_1	1	1	1	1	1	1	1
手术日期 t_2	周二	周三	周四	周五	周六	周日	周一

外伤从入院到手术的最小等待时间 $T_{51}=1$ 。

综上所述，各类患者最优入院期如表 11 所示。

表 11 最优入院时间与最小术前等待时间

病症类型 i	最优入院期（星期）	最小术前等待时间 T_i
白内障双眼	日	$T_{11}=1$
白内障单眼	二、日	$T_{21}=1$
视网膜、青光眼	二、三、四、五、日	$T_{31}=T_{41}=2$
外伤	每天	$T_{51}=1$

5. 2. 3 优先级分析

由于外伤属于急症，所以将其标记为最高优先级，即每天有空床则先安排伤员入院。其次，安排次优先级的患者入院。如果当天为患者患病类型所对应的最优入院日期，则可能安排其入院，标记为次级优先。如果当天不是患者对应的最优入院日期，则不安排入院。因为即使安排其入院，也不能提前其手术时间，只会造成床位浪费。

总结上面各类疾病最优入院日期的分布特点，可得到表 12。其中 $i=1$ 代表白内障双眼， $i=2$ 代表白内障单眼， $i=3$ 代表青光眼， $i=4$ 视网膜疾病， $i=5$ 代表外伤。

表 12 优先级分布表

	最高优先级	次优先级	无优先级
周一	5	/	1 2 3 4
周二	5	2 3 4	1
周三	5	3 4	1 2
周四	5	3 4	1 2
周五	5	3 4	1 2
周六	5	/	1 2 3 4
周日	5	1 2 3 4	/

下面讨论“次优先级患者”的安排策略。

从心理学角度，从问诊到入院的等待时间是患者最关心的。对于处于同一优先级的患者，我们引入比较“时间戳”的策略。

对于同处于次优先级的两患者 a ， b ，设 a ， b 从问诊到当前的等待时间为 T_{a0} ， T_{b0} 。根据患者患病的种类，查表可知当前日期到下一次最优入院日期的时间间隔 T_{ai} ， T_{bi} 。更新时间戳（患者从问诊到下一次最优入院期间的等待时间）

$T_{a0}'=T_{a0}+T_{ai}$ ， $T_{b0}'=T_{b0}+T_{bi}$ 。若 $T_{a0}'<T_{b0}'$ ，则安排 b 入院，否则安排 a 入院。

FCFS 策略比较的是患者从问诊到当前的等待时间，但这并不是最佳方式。采用比较 TS 时间戳的策略，即比较从问诊到下一次最优入院期间的等待时间，会更合理。比如一个白内障双眼患者和一个青光眼患者，两人同时问诊，假设今天是两种疾病入院的佳日期，即他们同属于次优先患者。现从他们中选择一人入院。如果白内障双眼患者今天不入院，则他至少还需要等七天才能等到下一个最优入院期；而青光眼患者也许只要等一两天即可入院。显然应当让白内障双眼患者入院。所以应该比较患者从问诊到下一次最优入院期间的等待时间，TS 比 FCFS 更合理。

单纯的优先级服务规则往往会造成“饿死现象”的产生，即某些患者由于优

优先级不高，问诊之后床位长期无法得到安排，不能入院造成“饿死”。而采用时间戳策略可以有效避免“饿死”现象的发生。

5. 2. 4 PR-TS 决策

综上所述，我们提出了 PR-TS(Priority-Timestamp, 优先权-时间戳)决策取代 FCFS (First come, First serve) 决策，以解决等待住院病人队列越来越长的情况。下面对该决策作以阐释：

PR-TS 决策基本思想：采取优先级和时间戳相结合的思想。PR（优先级）思想，根据每日是否为第 i 类病患最优入院期，对其进行优先级标记。首先将伤员标记为最高优先级，然后根据每种病症当天入院是否为最佳，如果为最优入院期，则将患者标记为次优先。非最优入院期的患者不安排住院。

对于处于同一优先级（这里为次优先级）的患者采取 TS（时间戳）思想。依次选择时间戳（从问诊到下一次最优入院日期的等候时间）最长的患者先入院，直到病床安排满为止。

5. 2. 5 PR-TS 决策最优性证明

定理一 假设每天有效床位数 s 不变，则单位时间（每天）治疗的患者人数 \bar{n} 达到最大值的充要条件是每个患者从问诊到住院的等待时间最小。

证明：设 \bar{T}_s 为每个患者平均的占床时间，即一个患者从入院到出院所需的平均时间，则每张床每天可以治好的患者数为 $1/\bar{T}_s$ 。由于有效床位数 s 不变，每天可以治疗的患者人数为 $\bar{n} = \frac{s \cdot 1}{\bar{T}_s}$ 。

从入院到出院的时间 T_s 由术前等待时间 T_1 和术后恢复时间 T_2 组成，即 $T_s = T_1 + T_2$ 。根据定义可知，术后恢复时间 T_2 是因患者而异的，而且是无法缩短的。所以只有调整 \bar{T}_1 才能改变 \bar{n} 值。根据 $\bar{n} = \frac{s}{\bar{T}_1 + T_2}$ 得，单位时间治疗的患者人数 \bar{n} 达到最大值的充要条件是所有患者从问诊到住院的平均等待时间 \bar{T}_1 最小，则每个患者的等待时间 T_1 必为最小值。故得证。

分析：定理一中假设每天有效床位数 s 不变，实际模型则不然。因为医院手术时间不同安排和每日就诊人数的不同，造成出现空床现象。将所给数据进行统

计，发现平均每天有效床位数接近 s 。PR-TS 模型旨在缩短每个患者入院到手术等待时间 T_1 的原则，可使每天治疗的患者人数近似最大，即医院的病床资源得到充分利用。

关于空床的讨论。PR-TS 决策中提出这样一个要求：即使当天有空床，无优先级的患者也不能入院。假设存在一种 PR-TS' 决策，要求当次优先级患者安排完后，如果出现空床，则按时间戳方法安排无优先级的患者入院。表面上来看，PR-TS' 决策充分利用了空床，而 PR-TS 决策会造成空床未被利用的情况，其实不然。下面讨论 PR-TS 决策与 PR-TS' 决策。

定理二 即使某天安排完所有次优先级患者之后，还有空床，也不应安排无优先级的患者入院。

证明：若采用 PR-TS' 策略：假设第 x 天本不是患者 a 入院的佳日期，但当次优先级患者安排完之后还有空床，于是安排 a 入院了。第 $x+1$ 天，有一患者 b 由于无空床而无法入院。如果在第 $x+1$ 天 b 的时间戳大于 a ，按照 TS 策略，本应当安排 b 入院， a 继续等待。但因安排无优先级患者提前入院而导致 TS 策略失效。故即使某天安排完所有次优先级患者之后，还有空床，也不应该安排无优先级的患者入院。

5.3 模型二 分类管理的床位安排模型

为了便于医院管理，我们分类安排床位，建立使得病人在系统内的平均逗留时间 $\overline{T_w}$ 最短的模型。由于病人术后恢复时间是因患者疾病种类而异的，并且不能规划使得这段时间减少，所以应该尽量使得每个病人从门诊到手术的等待时间最短，这样就可以使得病人的平均逗留时间最短。

对于每个病人而言，能在最近的手术期做手术，就可使得该病人的逗留期最短，换言之，就是要在最近的手术期前住进医院。那么在手术期前的时间内，要留有空床给该病人。

下面考虑每种病的具体情况。

设每天每种病到达门诊的人数是 $\overline{n_i}$ ，从手术到出院所需的平均天数为 $\overline{T_i}$ ，

从入院到出院所需的平均天数为 $\overline{D_i}$ （指从入院到手术的时间最小的情况）。

白内障双眼：白双能进行手术的日期只有每周一（这里指第一次手术，前面有约定），故从上周日到本周六到来的病人只能在下周一做手术，这些人在这之前必须全部住进病房，需要的最小床位数为 $7*\overline{n_1}$ ，考虑一般情况，这些人在下周日之前都可出院，所以总共需要的最小床位数即为 $7*\overline{n_1}$ 。

白内障单眼：白内障单眼进行手术的时间是每周一和三，从周二到周六到达的病人只能在下周一做手术，在此之前需入住病房，需要床位 $5\overline{n_2}$ ，而这部分人平均出院时间是周一加 $\overline{T_2}$ ，也就是下周四，所以周日和下周一到达的病人需要另外的病床 $2\overline{n_2}$ ，故白单需要的病床数为 $7\overline{n_2}$ 。

青光眼：青光眼能进行手术的时间是每周二，四，五，六，日。如果在每天的入住与出院病人动态平衡的条件下，青光所需的床数即为 $\overline{D_3}*\overline{n_3}$ ，但由于青光眼手术不在周一和周三进行，平均情况而言，就会出现在某一天只有病人进入却没有病人出院的情况，此时需要加一天病人所需要的床 $1*\overline{n_3}$ 以缓解此状况，之后就会出现有双倍于平均病人出院的情况，从而达到新的动态平衡，因此青光眼病房需要的病床数为 $(1+\overline{D_3})*\overline{n_3}$ 。

视网膜疾病：视网膜的情况与青光眼完全相同，可得，视网膜疾病病房所需的病床数为 $(1+\overline{D_4})*\overline{n_4}$ 。

外伤：外伤的安排方式都是在门诊的第二天就安排住院，这样，外伤病房需要的病床数为 $\overline{D_5}*\overline{n_5}$ 。

综上，理想的总病床数 $s'=7\overline{n_1}+7\overline{n_2}+(1+\overline{D_3})*\overline{n_3}+(1+\overline{D_4})*\overline{n_4}+\overline{D_5}*\overline{n_5}$ 。

六. 模型求解

6. 1 问题一 建立评价指标体系

这里我们以排队长度、服务强度、“饿死”现象、应变能力来建立模型的评价指标体系^[3]。

6. 1. 1 各项指标分析

● 排队长度——每天等待入院的患者队列长度

根据 FCFS 模型安排病床，用 MATLAB 模拟此策略安排病床的过程（见附件中的 FCFS.m）。

输出从 9 月 12 日开始的 50 天内，每天的排队长度。随机连续测试 6 次，得到队列长度的变化如图 3 所示；再连续测试 100 次，取平均，观察队列平均长度的变化，如图 4 所示。

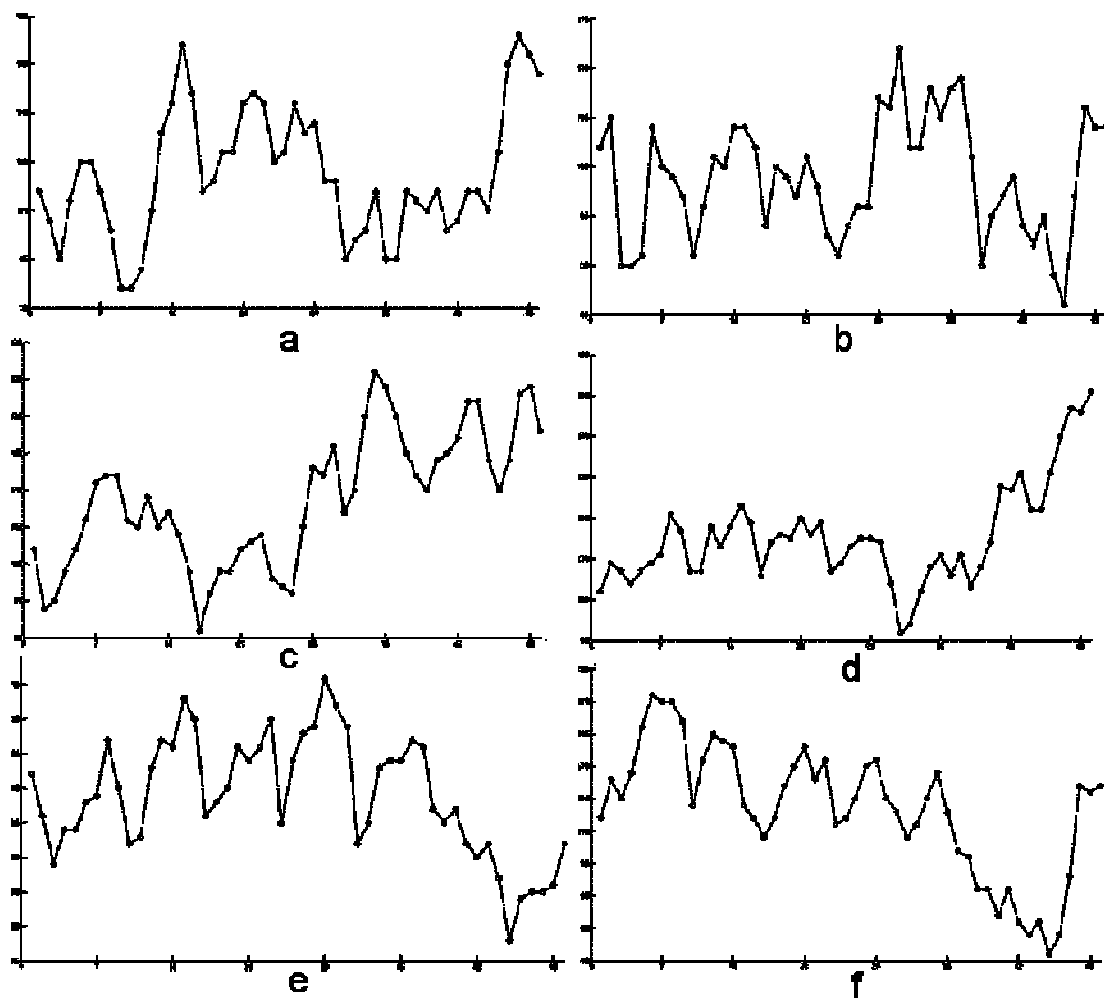


图3 连续6个随机的排队长度变化

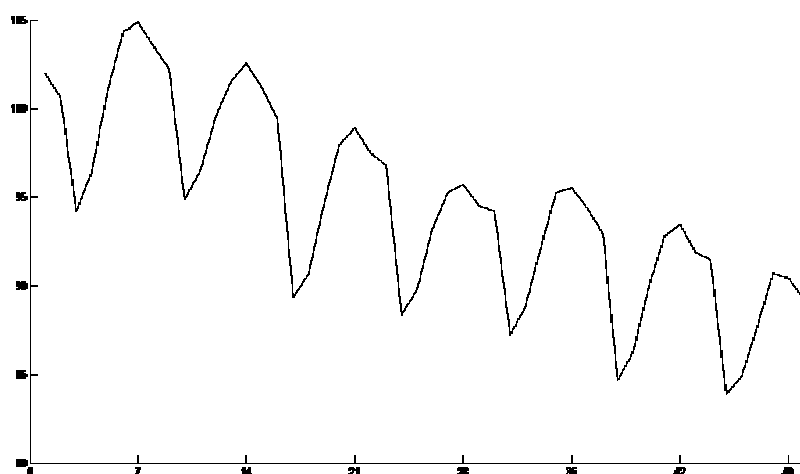


图4 排队长度取100次平均的变化趋势

趋势分析：对比图3中的abcdef可以看出，在50天内等待住院队列的长度变化趋势很不稳定，有波动上升的、波动下降的、振荡的。如cd排队长呈波动上升趋势，即FCFS策略可能造成排队人数越来越多，患者等待住院的时间越来越

越长。而现实中出现这种现象对于医院很不利，等待时间增长会造成大批患者离开，放弃治疗。

观察图 4，采用 FCFS 策略，从整体上排队长都呈波动下降趋势。但可以明显看出排队长度下降速率缓慢。这便可以解释采用 FCFS 策略可能造成队伍越来越长的现象。

● 服务强度——平均服务率 μ_i 与平均到达率 λ_i 之比

计算平均到达率 λ_i 。用 Excel 统计 n 天内第 i 种病来就诊的总人数 p_i ，则 $\lambda_i = p_i / n$ 。计算平均服务率 μ_i 。用 Excel 统计第 i 种病从问诊到出院的平均时间为 T_i ，分配给第 i 种病患者平均床位数为 S_i ，则单位时间能治好的患者人数为 $\mu_i = S_i / T_i$ 。

根据 $\rho_i = \mu_i / \lambda_i$ 得到各种疾病的服务强度如表 13。

表 13 各种疾病的服务强度

	平均服务率 μ_i	平均到达率 λ_i	服务强度 ρ_i
白内障双眼	2.69	1.64	1.64
白内障单眼	0.95	2.18	0.44
青光眼	0.86	1.03	0.83
视网膜疾病	2.71	2.79	0.97
外伤	1.14	1.05	1.08

分析：根据服务强度 ρ_i 的定义， $\rho_i > 1$ 说明单位时间的服务率大于患者的到达率，医院可满足患者排队长缩短； $\rho_i < 1$ ，说明单位时间的服务率小于患者的到达率，排队长越来越长。医院可基本满足白内障双眼、外伤患者的需求。但无法满足白内障单眼、青光眼、视网膜疾病患者的要求，即这几种疾病患者入院的排队人数可能越来越多。

这里，白内障单眼的服务强度远远达不到要求，这将造成排队人数剧增的现象。如果想解决排队人数越来越长的问题，则新策略的核心是提高白内障单眼的服务强度。

● 有无“饿死”现象

由于 FCFS 采取的是比较从问诊到入院的等待时间，不会出现某患者问诊之

后永远不能被安排入院的情况出现，即无“饿死”现象产生。

● 应变能力——方案对于就诊人数变动的稳定性

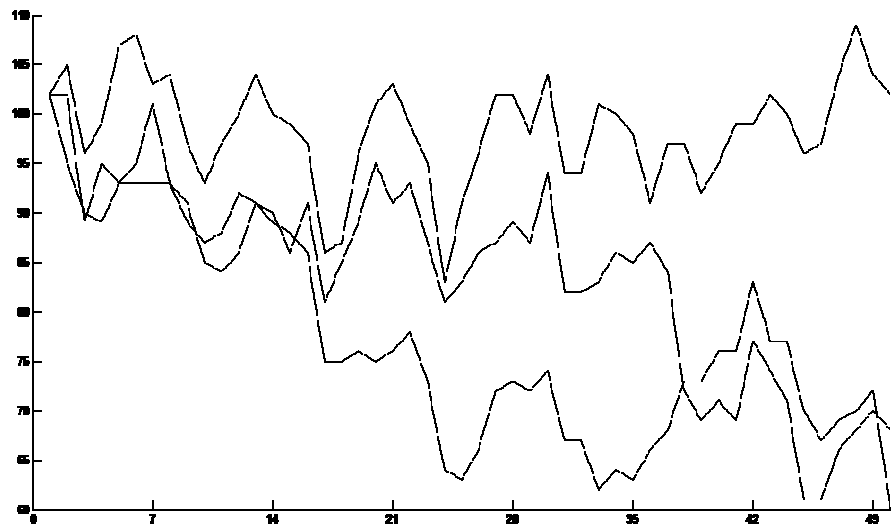


图 5 队列长随就诊人数变动的变化

随机取三条队列长的变化曲线，如图 5 所示。对比可以发现，当就诊人数随机变动时，队列长的变化趋势差异显著。这意味着，当就诊人数发生一个波动时，队列长的变化趋势会发生显著变化。由此判断 FCFS 的应变能力比较差。

6. 1. 2 FCFS 模型的综合评价

FCFS 算法较容易实现，所以在现实生活中通常被医院所采用。但从本质上说，FCFS 策略属于被动调节，应变能力差。队列人数的变化完全依靠就诊人数的变化，很容易产生排队人数越来越多的情况，造成患者逗留时间越来越长的恶性循环。此外，采用 FCFS 服务效率不高，该策略只顾及病患的术前等候时间，并没考虑服务时间的长短，从而造成对各类疾病的服务强度不一致。

6. 2 问题二 病床安排模型

就该住院部当前的情况，建立合理的病床安排模型，以根据已知的第二天拟出院病人数来确定第二天应该安排哪些病人住院。并模型利用问题一中的指标体系作出评价。

6. 2. 1 模型建立

根据 5. 1. 5 中提出的 PR-TS 思想建立病床安排模型。方案实施的流程图如图 6 所示。据此用 MATLAB 编程进行模拟^[4]（程序见附件中的 PR-TS.m）。根据已知的第二天拟出院病人数可确定第二天应该安排哪些病人住院。（其中， $i=1$ 代表白内障双眼， $i=2$ 代表白内障单眼， $i=3$ 代表青光眼， $i=4$ 视网膜疾病， $i=5$ 代表外伤。）

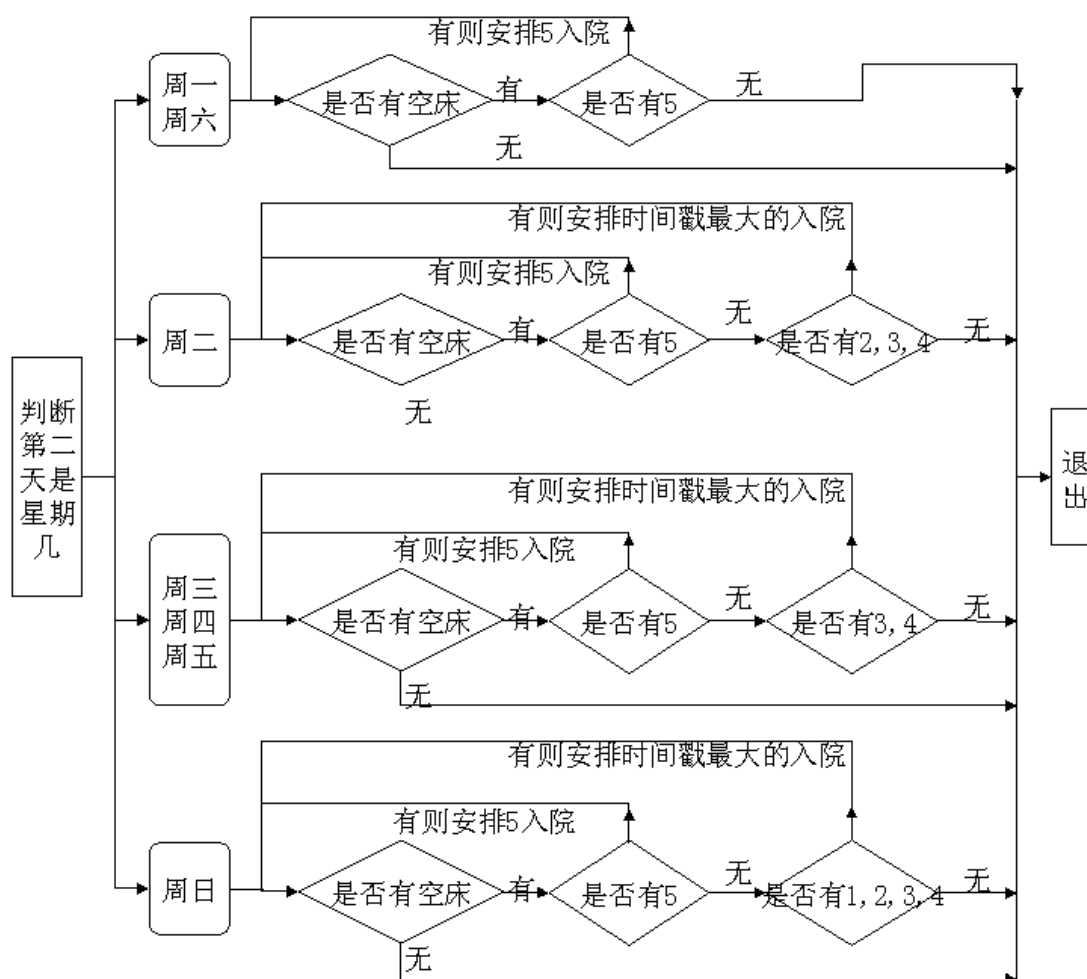


图 6 入院安排流程图

6.2.2 各项指标分析

● 排队长度——每天等待入院的患者的队列长度

输出从 9 月 12 日开始的 50 天内，每天的排队长度。连续随机测试 100 次，取平均，观察队列平均长度的变化，如图 7 所示。

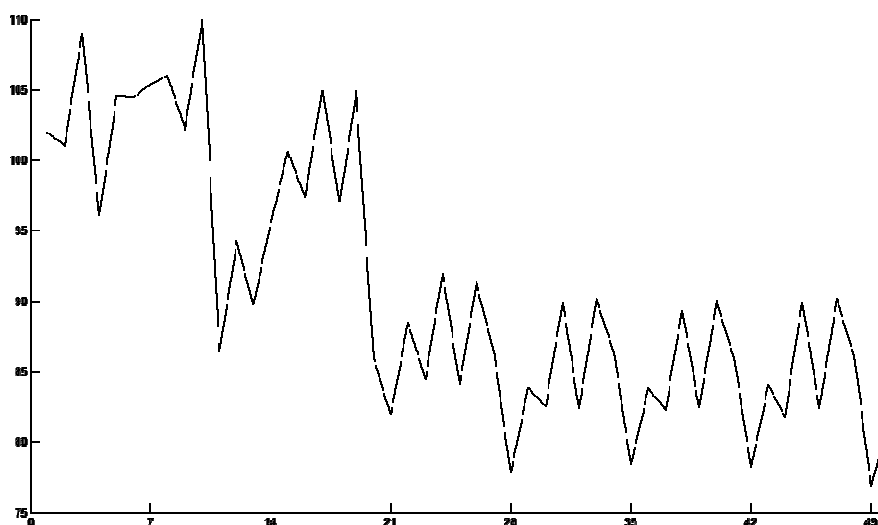


图 7 采用 PR-TS 的平均排队长度的变化趋势

趋势分析：观察图 7 中的整体变化趋势，大约在 20 天左右，系统的排队长度便趋向稳态波动。

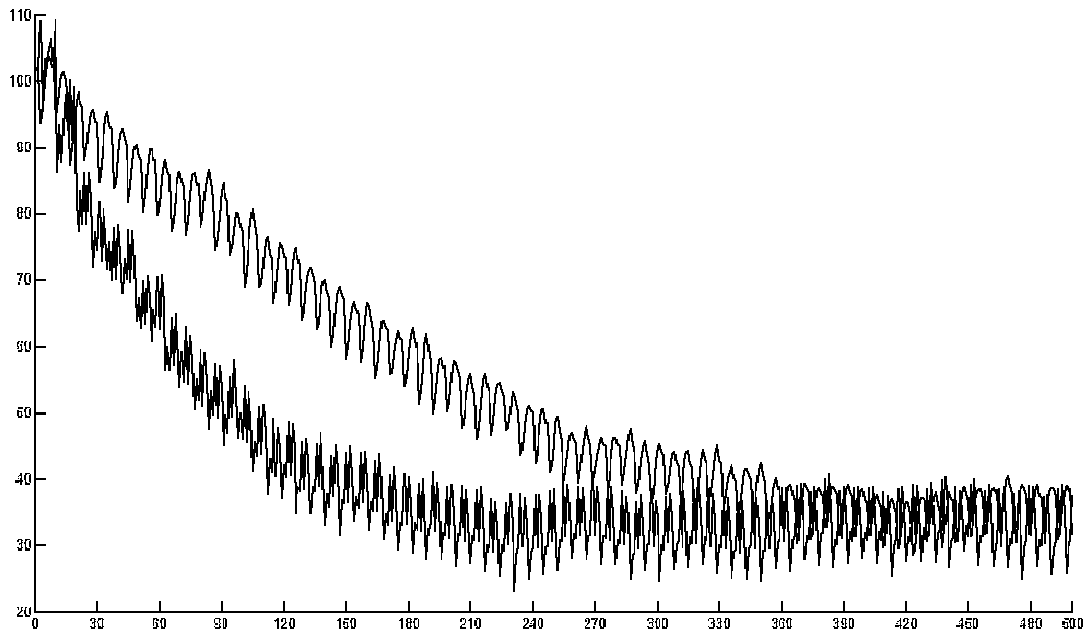


图 8 两种策略下的 500 天队列长度对比

对比 FCFS 和 PR-TS 策略下的 500 天队列长度变化趋势。如图 8 所示，可明显看出采用 PR-TS 策略，堆积较长的队列长度迅速降低，近似呈指数下降。而采用 FCFS 策略队列长度下降速度很缓慢。

● **服务强度——平均服务率 μ_i 与平均到达率 λ_i 之比**

根据 $\rho_i = \mu_i / \lambda_i$ 得到各种疾病的服务强度如表 14。

表 14 各种疾病的服务强度

	平均服务率 μ_i	平均到达率 λ_i	服务强度 ρ_i
白内障双眼	2.34	1.64	1.42
白内障单眼	2.86	2.18	1.31
青光眼	0.86	1.03	0.83
视网膜疾病	1.99	2.79	0.71
外伤	1.42	1.05	1.08

分析：各类病症的服务强度较高，几乎可以保证所有病症的排队数越来越小或趋于平稳。

● **有无“饿死”现象**

由于 PR-TS 策略中采用了比较从问诊到下一次最优入院期的等待时间，不会

出现某患者问诊之后永远不能被安排入院的情况出现，即无“饿死”现象产生。

● 应变能力——方案对于就诊人数变动的稳定性

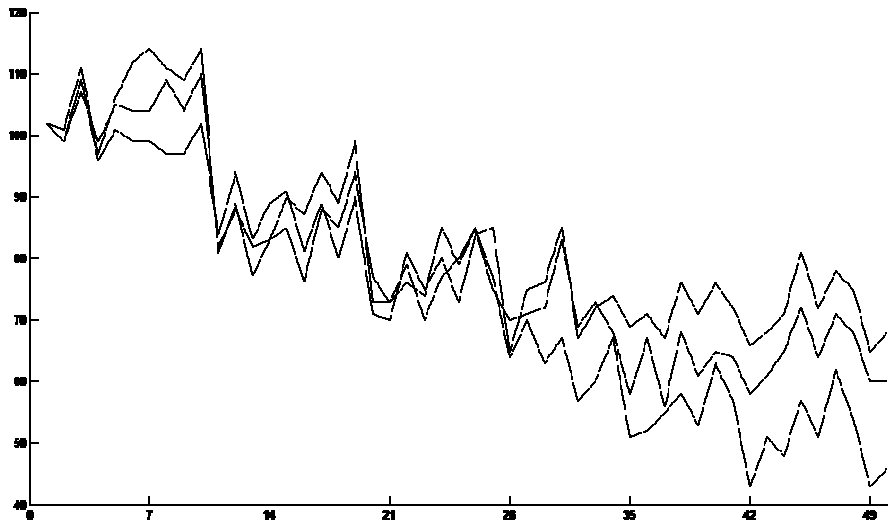


图9 队列长随就诊人数变动的变化

随机取三条队列长的变化曲线，如图9所示。对比可以发现，当就诊人数随机变动时，队列长的变化趋势相同。这意味着，当就诊人数发生波动时，队列长的变化趋势会不会发生显著变化，均会越来越小直到趋于动态稳定。由此判断PR-TS策略的应变能力很好。

6.2.3 PR-TS 模型评价

PR-TS策略不仅顾及病患的术前等候时间，还考虑了服务时间的长短，服务效率高，提高了医院资源的利用率。

PR-TS策略属于自动调节，应变能力强。当系统中的就诊人数波动增加时，采用PR-TS策略，系统中等待的人数会迅速恢复到平稳状态，不会出现系统中排队人数越来越多而无法控制的情况。

“时间戳”概念的提出，解决了FCFS的弊端。FCFS只比较问诊到入院的等待时间，而“时间戳”比较问诊到下次最优入院时间的等待时间，更为合理。

当然，PR-TS的计算过程相对麻烦。每天安排病床时需要查最优入院期、对比时间戳，操作相对比较复杂。但如果医院采用计算机来安排病床，计算相对容易，更适合使用PR-TS策略。

6.3 问题三 估计出院日期

设每种病已就诊未入院的人数是 b_i ，目前已入院未出院的人数是 a_i ，每种病的平均治疗时间是 t_i ，目前每天出院的 i 种病病人的平均人数是 a_i/t_i ，则未就诊人数 b_i 全部住院需要的平均天数是 $b_i/(a_i/t_i)$ 。亦即为此时来问诊病人能住院大致

所需要的时间。

考虑经过 $b_i/(a_i/t_i)$ 天，并不一定是此类病人入住的最优日期，而是离最优日期有一定天数的等待时间，取这个等待时间可能出现的最大值，既可大致估计每种病人可入院的大致时间区间，如表 15 所示。

表 15 病患入院等待区间

病患类型	等待区间
白内障双眼	$[b_1t_1/a_1, b_1t_1/a_1+7]$
白内障单眼	$[b_2t_2/a_2, b_2t_2/a_2+5]$
青光眼	$[b_3t_3/a_3, b_3t_3/a_3+1]$
视网膜疾病	$[b_4t_4/a_4, b_4t_4/a_4+1]$
伤 员	1 天

附件中的 problem_3.m 帮助求解问题 3。根据当前住院病人及等待住院病人的统计情况，在病人门诊时得到其相应的住院时间。在程序中具体计算 2008-9-12 日的病人的住院时间。经验证，模拟的日期与表 15 的入院等待区间相符。

6. 4 问题四 周六、日无手术的情况

6. 4. 1 优先级的变化

由于周六、日无手术，根据各种病症的手术时间，重新计算入院到手术的等待天数，如表 16 所示。

表 16 周六周日无手术时各病患等待时间

入院	白内障双眼		白内障单眼		视网膜		青光眼		伤员	
	手术日期	等待天数	手术日期	等待天数	手术日期	等待天数	手术日期	等待天数	手术日期	等待天数
周一	周一	7	周三	2	周四	3	周四	3	周二	1
周二	周一	6	周三	1	周四	2	周四	2	周三	1
周三	周一	5	周一	5	周五	2	周五	2	周四	1
周四	周一	4	周一	4	周二	5	周二	5	周五	1
周五	周一	3	周一	3	周二	4	周二	4	周一	3
周六	周一	2	周一	2	周二	3	周二	3	周一	2
周日	周一	1	周一	1	周二	2	周二	2	周一	1

总结上面各类疾病最优入院日期的分布特点，可得到表 17。其中 $i=1$ 代表白内障双眼， $i=2$ 代表白内障单眼， $i=3$ 代表青光眼， $i=4$ 代表视网膜疾病， $i=5$ 代表外伤。

表 17 周六周日无手术时优先级表

	最高优先级	次优先级	其他
周一	5	/	1 2 3 4
周二	5	2 3 4	1
周三	5	3 4	1 2
周四	5	/	1 2 3 4
周五	/	/	1 2 3 4 5
周六	/	/	1 2 3 4 5
周日	5	1 2 3 4	/

根据表 17 的优先级，按照 PR-ST 策略得到方案实施的流程图（如图 10）。用 MATLAB 根据流程图模拟该过程（程序见附件中 problem_4.m）。

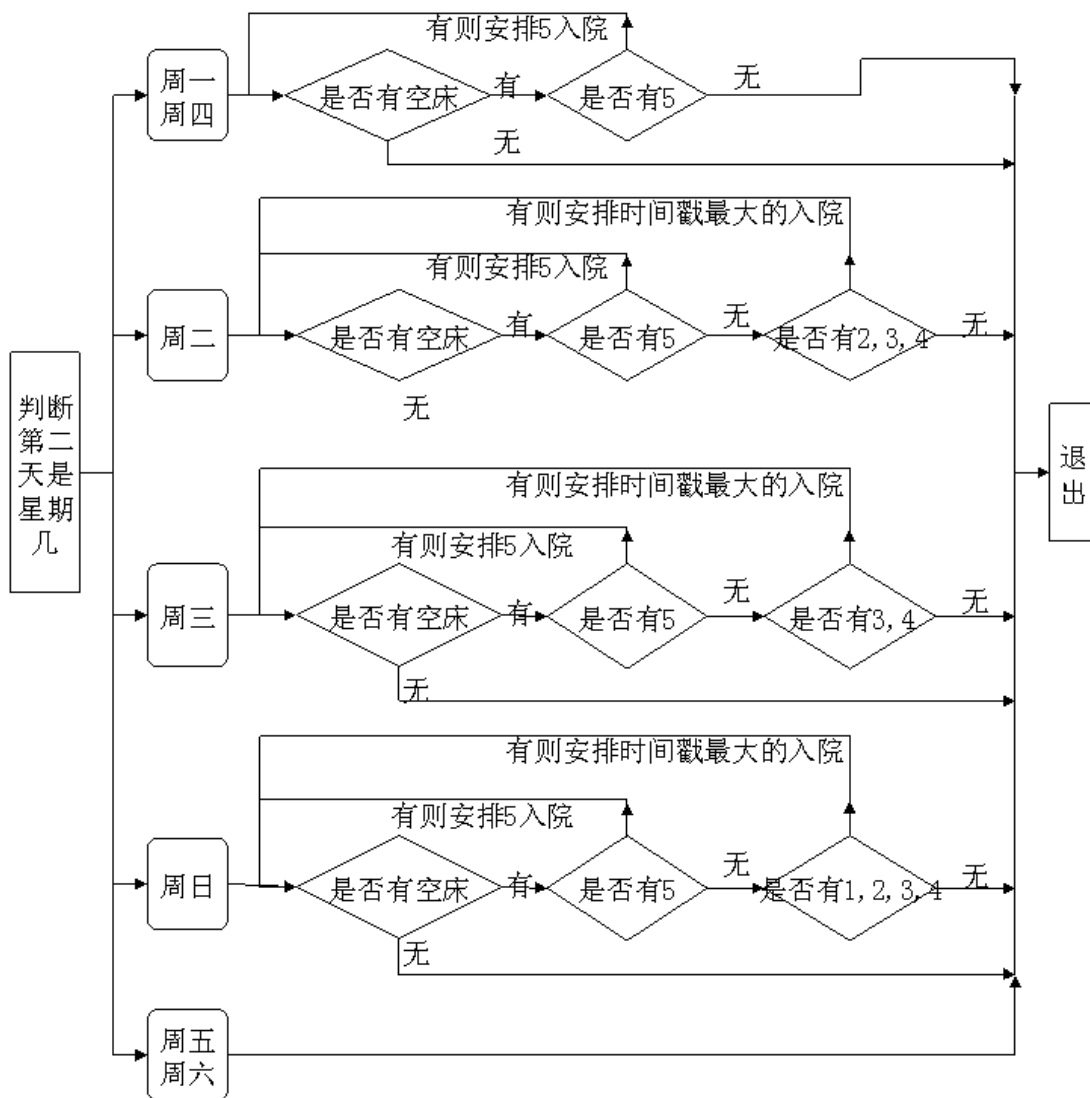


图 10 周六周日无手术的流程图

用 MATLAB 模拟 300 天该方案平均排队长变化趋势，得到图 11。

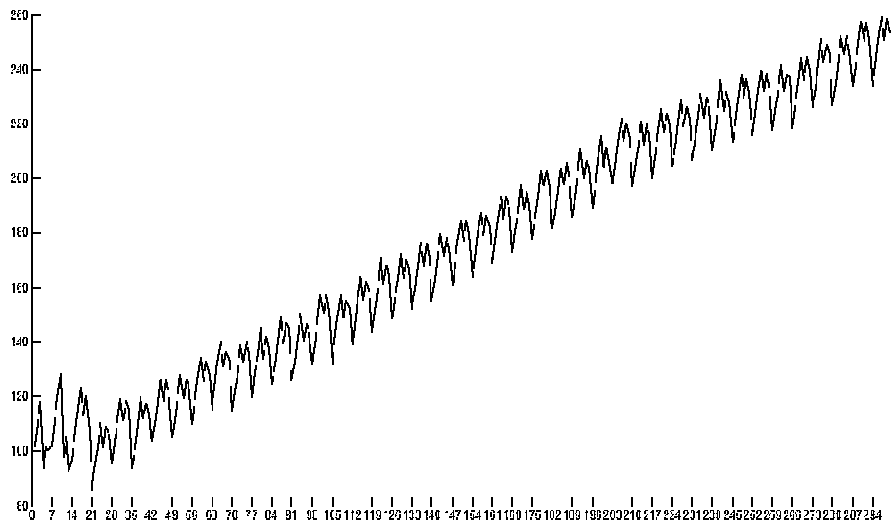


图 11 300 天平均排队长变化趋势

由图可以明显看出当周六周日不安排手术时，等待入院的患者排队长度将越来越长！所以医院周一、周三做白内障的手术时间安排应当作调整。

6. 4. 2 调整手术日期安排

目前该院是每周一、三做白内障手术，如果要做双眼是周一先做一只，周三再做另一只。可知，白内障双眼手术必须间隔一天。由此，调整手术日期的安排共有两种方案：

1. 周二、周四做白内障手术。白内障双眼周二先做一只，周四再做一只。视网膜和青光眼手术安排在周一、周三、周五。伤员周一到周五均可手术。
2. 周三、周五做白内障手术。白内障双眼周三先做一只，周五再做一只。视网膜和青光眼手术安排在周一、周二、周四。伤员周一到周五均可手术。

● 方案一 白内障周二、周四手术

分析方案下的入院日期与术前等待天数的分布特点和优先级表。如表 18，19 所示。方案一平均排队长度变化趋势如图 12 所示。（程序见附件中的 problem_4_24.m）

表 18 方案一等待天数分布表

入院	白内障双眼		白内障单眼		视网膜		青光眼		伤员	
	手术日期	等待天数	手术日期	等待天数	手术日期	等待天数	手术日期	等待天数	手术日期	等待天数
周一	周二	1	周二	1	周三	2	周三	2	周二	1
周二	周二	7	周四	2	周五	3	周五	3	周三	1
周三	周二	6	周四	1	周五	2	周五	2	周四	1
周四	周二	5	周二	5	周一	4	周一	4	周五	1
周五	周二	4	周二	4	周一	3	周一	3	周一	3
周六	周二	3	周二	3	周一	2	周一	2	周一	2
周日	周二	2	周二	2	周三	3	周三	3	周一	1

表 19 方案一优先级表

	最高优先级	次优先级	其他
周一	5	1 2 3 4	/
周二	5	/	1 2 3 4
周三	5	2 3 4	1
周四	5	/	1 2 3 4
周五	/	/	1 2 3 4 5
周六	/	3 4	1 2 5
周日	5	/	1 2 3 4

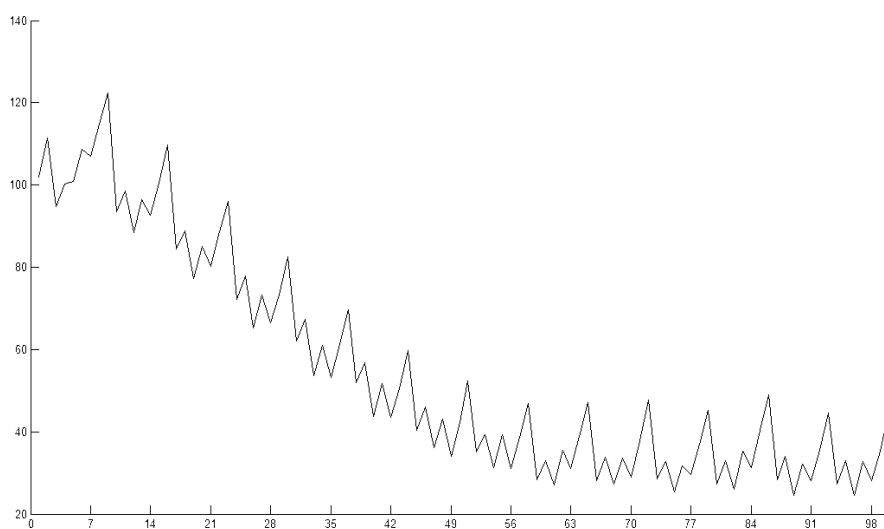


图 12 方案一平均排队长度变化趋势

● 方案二 白内障周三、周五手术

分析方案下的入院日期与术前等待天数的分布特点和优先级表。如表 20，21 所示。方案二平均排队长度变化趋势如图 13 所示。（程序见附件中的 problem_4_35.m）

表 20 方案二等待天数分布表

入院	白内障双眼		白内障单眼		视网膜		青光眼		伤员	
	手术日期	等待天数	手术日期	等待天数	手术日期	等待天数	手术日期	等待天数	手术日期	等待天数
周一	周三	2	周三	2	周四	3	周四	3	周二	1
周二	周三	1	周三	1	周四	2	周四	2	周三	1
周三	周三	7	周五	2	周一	5	周一	5	周四	1
周四	周三	6	周五	1	周一	4	周一	4	周五	1
周五	周三	5	周三	5	周一	3	周一	3	周一	3
周六	周三	4	周三	4	周一	2	周一	2	周一	2
周日	周三	3	周三	3	周二	2	周二	2	周一	1

表 21 方案二优先级表

	最高优先级	次优先级	其他
周一	5	/	1 2 3 4
周二	5	1 2 3 4	/
周三	5	/	1 2 3 4
周四	5	2	1 3 4
周五	/	/	1 2 3 4 5
周六	/	3 4	1 2 5
周日	5	3 4	1 2

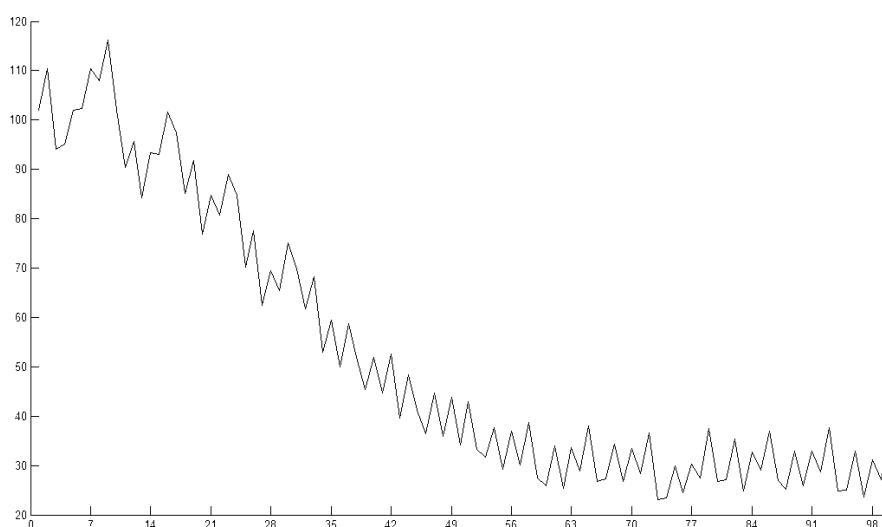


图 13 方案二平均排队长度变化趋势

由图 12、13 可以看出，方案一、方案二都可以实施。

6. 5 问题五 分类管理模型

根据 5.3 模型二的讨论，带入数据得，理想的总病床数 s' 为：

$$\begin{aligned}
 s' &= 7 \cdot \overline{n_1} + 7 \cdot \overline{n_2} + (1 + \overline{D_3}) \cdot \overline{n_3} + (1 + \overline{D_4}) \cdot \overline{n_4} + \overline{D_5} \cdot \overline{n_5} \\
 &= 7 \cdot 1.64 + 7 \cdot 2.18 + 11.08 \cdot 1.03 + 2.79 \cdot 13.17 + 1.05 \cdot 7.04 = 82.29 > 79
 \end{aligned}$$

数据波动修正

由于 $s' > s$ ，故要对床的分配进行调整，以上结果均是考虑每天来人数和术后恢复天数都等于期望条件下得出的，而实际中每天来人数和病人的术后恢复天数都是在期望的周围波动。

决定数据对病床减少的情况的适应能力决定于三个因素：

1. **数据数量的大小。**数据量越大，数据完备性就越好，自我调整能力就越强。

2. **数据的稳定性。**数据的方差越小，越稳定，就越难适应条件变坏的情况，反之，在一定范围内，数据的方差越大，对条件的适应能力越强。

3. 条件的苛刻性。条件越苛刻，数据就越难适应条件变化，本模型中的条件指手术进行的条件。

根据以上因素，对各种病的情况进行综合分析，得出如下结论：**视网膜疾病的数据量大，方差也足够大，并且做手术的条件不苛刻，故可以对视网膜疾病的病床数进行削减。**而白单和白双的条件要求比较苛刻，必须在每周的一三进行手术，数据量也不够大，故调整余地较小，青光眼的条件不苛刻，但是数据方差很小，数据十分稳定，所以也无法进行调整。考虑外伤患者的特殊情况，要尽量保证第一时间得到治疗，故不做调整。

据此，得到如下床位分配结果：

白内障双眼 16 白内障单眼 12 青光眼 11 视网膜 32 外伤 8

我们可以利用计算机程序（详细程序见附件中的 problem_5.m），模拟前 100 天整个系统的发展情况，进而统计出其平均术前时间。（求 100 次的平均值）

根据已经得到的数据，试用计算机模拟求出各个床位上下波动一个单位时的情况，并求出每种情况对应的评价术后时间。根据排列组合原理，一类情形为“某疾病加一张床位其他疾病减一张床位”，该情况有 20 种；第二类情形为“某两疾病加一张床位其他两疾病减一张床位”，该情况有 20 种。易知共有 50 种这样的情况。（详见附表）

排列表中术后时间的顺序，发现几种情况的分配比最初估计值要稍优。对先前结果进行修正，得到最优的分配方案为：**白内障双眼 16 张床，白内障单眼 13 张床，青光眼 11 张床，视网膜 31 张床，外伤 8 张床。**

七. 参考文献

- [1] 彭迎春等 运用排队论模型测量医院门诊流程效率 中华医院管理杂志 2005 年 12 月第 21 卷第 12 期 806-808
- [2] 常文虎等 排队论在测量门诊挂号和收费窗口服务流程效率中的应用 中华医院管理杂志 2005 年 12 月第 21 卷第 12 期 810
- [3] 赵军宽等 医院门诊随即服务系统分析与管理对策 中国卫生质量管理 2005 年 2 月 第 12 卷第 1 期
- [4] 赵育新等 建模与仿真技术在医院伤病员救治排队系统中的应用 解放军医院管理杂志 2005 年 9 月 12 日 第五期 463-465

八. 附 录

最小逗留时间模拟值表

白内障双眼	白内障单眼	青光眼	视网膜疾病	外伤	问诊到手术
16	13	11	31	8	3.015368
17	13	11	31	7	3.032736
16	13	11	32	7	3.045753
16	13	10	32	8	3.058943
17	12	11	32	7	3.059104
17	13	10	32	7	3.060025
16	12	11	33	7	3.075919
17	12	10	31	9	3.089074

16	12	11	31	9	3. 09918
17	12	10	32	8	3. 104923
17	13	10	31	8	3. 123971
16	13	10	31	9	3. 127666
15	13	11	33	7	3. 136355
17	12	11	31	8	3. 136551
17	12	12	31	7	3. 145033
15	13	11	32	8	3. 148785
16	12	10	33	8	3. 14928
16	12	11	32	8	3. 153654
16	12	12	32	7	3. 156439
15	12	11	33	8	3. 16834
17	11	11	33	7	3. 172288
16	13	10	33	7	3. 186214
17	12	10	33	7	3. 194409
15	12	12	32	8	3. 195583
16	11	12	32	8	3. 20662
16	12	12	31	8	3. 207587
17	11	10	32	9	3. 211926
17	11	11	31	9	3. 227798
16	11	11	32	9	3. 237949
15	12	11	32	9	3. 239042
17	11	11	32	8	3. 246293
15	13	10	33	8	3. 24711
16	11	11	33	8	3. 256905
15	13	10	32	9	3. 256962
16	13	12	31	7	3. 270739
15	12	12	33	7	3. 275631
15	13	11	31	9	3. 297706
16	11	10	33	9	3. 301723
15	12	10	33	9	3. 311609
16	11	12	31	9	3. 318296
15	13	12	31	8	3. 322117
17	11	12	32	7	3. 334502
15	13	12	32	7	3. 338783
16	12	10	32	9	3. 343744
17	11	10	33	8	3. 364242
17	11	12	31	8	3. 389839
16	11	12	33	7	3. 397919
15	11	12	33	8	3. 416046
15	11	11	33	9	3. 425046
15	11	12	32	9	3. 468103
15	12	12	31	9	3. 501619

*有底色的为最初估计值。

编程思想

PR-TS 方案:

初始化两个队列:

队列一: 记录当前病床上的病人的情况, 包括记录他们的手术时间和疾病种类;
 队列二: 记录当前问诊后但尚未住院的等待中的病人的情况, 包括记录他们的问诊时间和疾病种类。

将今天（2008-9-12）作为第一天，每天按照一定的步骤更改系统内各个组成部分的状态，一直执行到第 n 天。

每天分为三个操作步骤：

步骤一：有些病人的术后的观察时间已经足够，则安排他们出院，即从队列一中取出，让出床位。其中：各类疾病术后的观察时间的界限，是根据题中已出院病人的统计情况，取相同概率的随机数。

步骤二：将队列二中的病人安排住院。其中：安排哪些病人住院，是根据我们的 PR-TS 算法，结合病人的种类、问诊时间以及当日是星期几来考虑的。

步骤三：将当天问诊的病人加入到队列二中。其中：每天每类病人的问诊数取泊松随机数，泊松分布的期望值是根据题中问诊病人的问诊时间统计得到的。

由此即可模拟出每天的问诊情况，住院情况，出院情况。

FCFS 方案：

与 PR-TS 方案思想大致相同，只是在每天的步骤二中，决策安排哪些病人住院时，是根据 FCFS 算法，只和问诊时间有关，与病人的种类、以及当日是星期几无关。

周六周日不安排手术的情况：与 PR-TS 方案思想大致相同，只是在每天的步骤二中，决策安排哪些病人住院时，仍是根据我们的 PR-TS 算法，只是与具体当天是星期几的情况稍有变动。