第2章习题

第1题 席位分配

1. 比例加惯例　2. Q值方法　3. d’Hondt方法

	1	2	3	4	5
A	235	117.5	78.3	58,75	…
B	333	166.5	111	83.25	…
C	432	216	144	108	86.4

	1	2	3	1	2	3
A	3	2	2	4	4	3
B	3	3	3	5	5	5
C	4	5	5	6	6	7
总计	10	10	10	15	15	15

- 已知p_i, 已有n_i,增加1席，给 p_i/n_i+1最大的一方
- 使分配的pi/ni,尽量接近，即

$$\max(\min_i(\frac{p_i}{n_i}))$$

$$s.t.\quad \sum_i n_i = n$$

第7题 商品包装

重量$w \propto$体积$v \propto$尺寸a^3　面积$s \propto a^2$

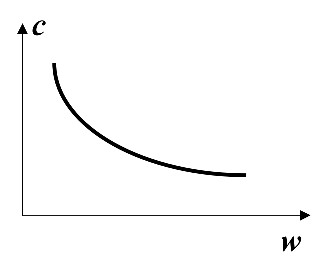
生产成本$C_1 \propto w$　包装成本$C_2 \propto s \propto w^{2/3}$　其它成本**C_3**(常数)

总成本$C = C_1 + C_2 + C_3 = k_1 w + k_2 w^{2/3} + k_3$

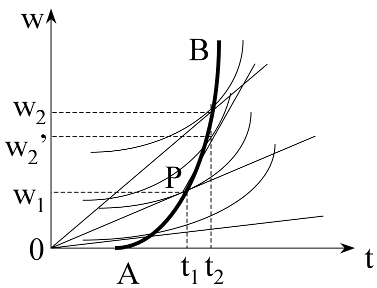
单位重量成本$c = C / w = k_1 + k_2 w^{-1/3} + k_3 w^{-1}$

1. $w \uparrow \Rightarrow c \downarrow, \quad (\frac{dc}{dw} < 0)$
2. $w \uparrow \Rightarrow c \downarrow$变缓（$c(w)$下凸),

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dw}\left|\frac{dc}{dw}\right| < 0$$



第2题 雇员与雇主



雇员工作时间t，工资w

雇员的无差别曲线族
w=w(t,c)，参数c为满意度

雇主的计时工资线族 W=kt,
参数k为工资率

协议线（ w与W的切点连线）AB

第一种方法：提高计时工资率k, 得w_2

第二种方法：用超时工资——自$P(t_1,w_1)$作某条
无差别曲线的切线，使切点的横坐标为 t_2, 得w_2'

若以P为原点的无差别曲线族与w=w(t,c)相同，则有$w_2' < w_2$

第6题 传送带效率

单钩（每周期m只)	双钩（每周期m对)
每只被一工人触到概率p=1/m	每对被一工人触到概率p=1/m
每只不被一工人触到概率q=1-p	每对不被一工人触到概率q=1-p
每只挂钩为空概率q^n	每对挂钩为空概率q^n
每只挂钩非空概率$1-q^n$	每对挂钩一只为空概率npq^{n-1}
一周期运走产品数$m(1-q^n)$	一周期运走产品数$2m-m(2q^n+npq^{n-1})$
传送带效率**$D=m[1-(1-1/m)^n]/n$**	传送带效率 **$D'= [2m-m(2q^n+npq^{n-1})]/ n$**

双钩传送带效率 **D'= [2m-m(2q^n+npq^{n-1})]/ n**

$$D' = \frac{m}{n}[2 - 2(1-\frac{1}{m})^n - \frac{n}{m}(1-\frac{1}{m})^{n-1}]$$

$$= \frac{m}{n}[2 - 2(1 - \frac{n}{m} + \frac{n(n-1)}{2m^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6m^3} + \cdots)$$

$$- \frac{n}{m}(1 - \frac{n-1}{m} + \frac{(n-1)(n-2)}{2m^2} - \cdots)]$$

$$= 1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2m^2}$$

$$= 1 - \frac{(n-1)(n-2)}{6m^2} \approx 1 - \frac{n^2}{6m^2}$$

单钩

$$D = 1 - \frac{n}{2m}$$

$$E = \frac{n}{2m}$$

$$E_2 = \frac{n}{4m}$$

钩子增加1倍

双钩

$$E' = \frac{n^2}{6m^2} = \alpha E_2 < E_2$$

$$\alpha = \frac{2n}{3m} < 1\ (m > n)$$

第5章习题（179页） 5（只做前2种给药方式）,6 (1), 20

大作业候选题之4 影院座位设计

座位的满意程度主要取决于视角 α 和仰角 β 。α 越大越好；β 太大使人的头部过分上仰，引起不舒适感，一般要求 β 不超过 30^0。

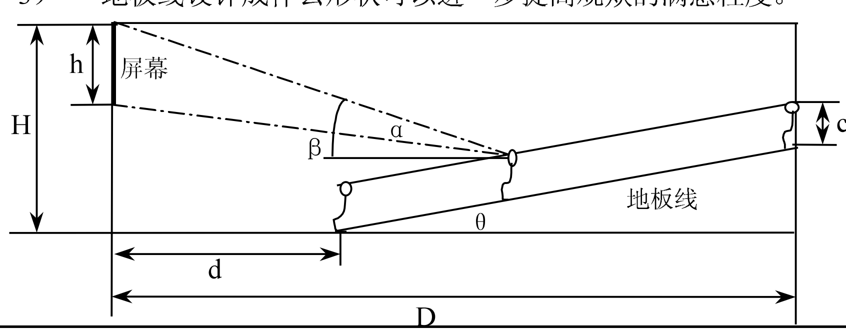
h	H	d	D	c
1.20	4.50	5.91	18.81	1.10

（单位：米）

1） 若地板线倾角 θ =10^0，问最佳座位在什么地方。

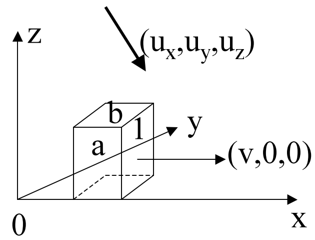
2） 求地板线倾角 θ ，使所有观众的平均满意程度最大。

3） 地板线设计成什么形状可以进一步提高观众的满意程度。



7. 淋雨量

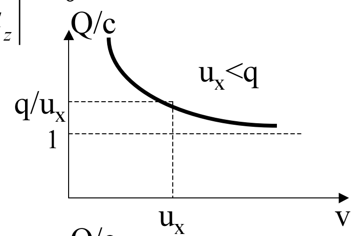
第4章习题

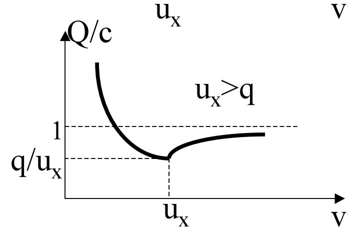


$$Q(v)=\frac{s}{1+a+b}\frac{l}{v}[|u_x-v|+a|u_y|+b|u_z|]$$

$$=c\frac{q+|u_x-v|}{v},\ q=a|u_y|+b|u_z|$$

$$=\begin{cases} c(\dfrac{q+u_x}{v}-1), v\le u_x \\ c(\dfrac{q-u_x}{v}+1), v>u_x \end{cases}$$





若人静止时前后淋雨量大于侧、顶淋雨量，则令$v=u_x$, 总淋雨量最小。

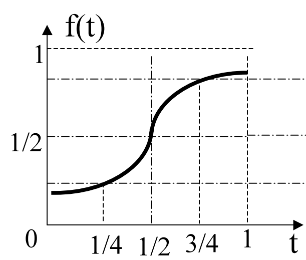
8. 广告和利润

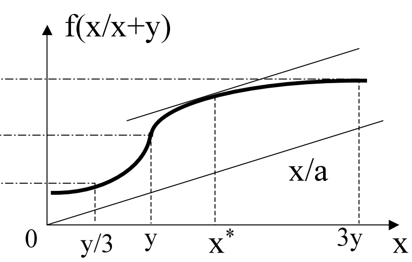
甲公司利润

$$P(x)=af(t)-x, t=x/(x+y)$$

求x使$P(x)$最大

f(t)图形





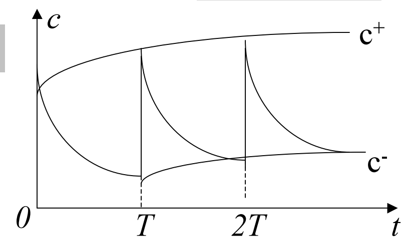
$$P(x)=a[f(\frac{x}{x+y})-\frac{x}{a}]$$

$\Rightarrow P(x^*)$最大

第5章习题 6）一室模型、快速静脉注射下给药方案设计

血药浓度变化规律 $c(t)=De^{-kt}/V$ 控制范围 $c_1 \le c(t) \le c_2$

已知***V*****,*****k*****,*****c*****$_1$,*****c*****$_2$**，设计药量**D**和间隔**T**



$$c(T^-)=De^{-kT}/V$$

$$c(T^+)=D(1+e^{-kT})/V$$

$$c(nT^-)=D(e^{-kT}+\cdots+e^{-nkT})/V \quad \to D/V(e^{kT}-1)=c^-$$

$$c(nT^+)=D(1+e^{-kT}+\cdots+e^{-nkT})/V \quad \to De^{kT}/V(e^{kT}-1)=c^+$$

若取 $c_1=c^-$, $c_2=c^+$, 可得 $D=V(c_2-c_1), T=\ln(c_2/c_1)/k$

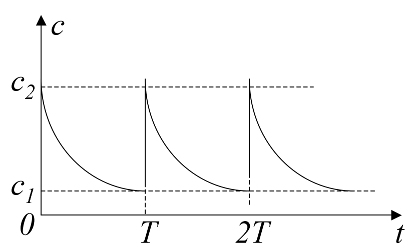
若取 $c_1=c(T^+)$, $c_2=c^+$, 计算较复杂

一种实用的简化方案

第1次给药量 $D_0=Vc_2$

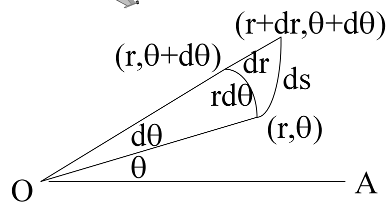
以后每次给药量 $D=V(c_2-c_1)$

给药间隔 $T=\ln(c_2/c_1)/k$



20)飞机搜索潜艇

已知t=0艇在O点，飞机在A点，OA=6, 艇速v_1=20, 机速v_2=40, 艇以任意方向直线离开，要使飞机定能发现潜艇，求飞机飞行路线

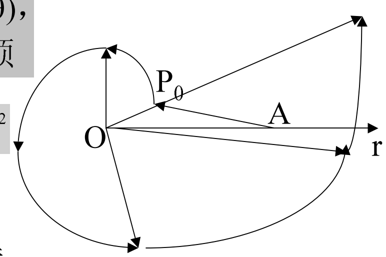


1. 设时刻t飞机在(r,θ)，潜艇在(r,θ+dθ)，为使二者t+dt在(r+dr,θ+dθ)相遇，必须

$\dfrac{ds}{dr}=\dfrac{v_2}{v_1}=2,$ 又$\because (ds)^2=(dr)^2+(rd\theta)^2$

$\therefore \dfrac{dr}{rd\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow r=r_0e^{\frac{\theta-\theta_0}{\sqrt{3}}}$

~对数螺线

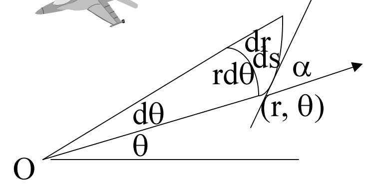


(r_0, θ_0)是满足$AP_0=2OP_0$的任意一点P_0的坐标.

飞机从$\mathbf{P_0}$沿对数螺线飞行一周必能发现潜艇

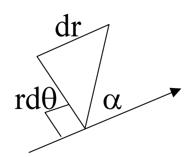
2. 飞机的光滑航线

考察对数螺线$r=r_0e^{\frac{\theta-\theta_0}{\sqrt{3}}}$在任一点(r,θ)的切线与向径的夹角α

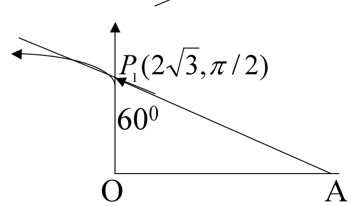


得 $ctg\alpha=\dfrac{dr}{rd\theta}$ 因为 $\dfrac{dr}{rd\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

故$\alpha=60^0$ 又AP_1与向径的夹角也是60^0



$\mathbf{AP_1}$与航线在$\mathbf{P_1}$点相切。



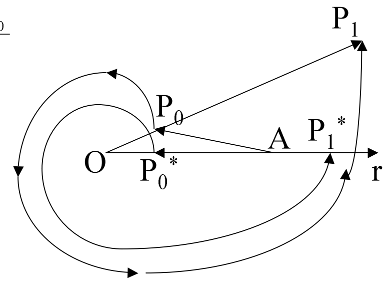
注：对任意极坐标曲线 r=r(θ), 均有

$\dfrac{dr}{d\theta}=rctg\alpha$ α是切线与向径的夹角

而对数螺线 $r=ae^{b\theta}$ 是α等于常数的唯一曲线

3. 飞机航线的长度 $r = r_0 e^{\frac{\theta-\theta_0}{\sqrt{3}}}$

考虑最坏情况，飞机从P_0沿对数螺线飞行一周才能发现潜艇。



航线由直线AP_0和弧P_0P_1组成

弧P_0P_1的长度 $l = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} r d\theta\ ? \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} ds = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \sqrt{(dr)^2+(rd\theta)^2}$

简便算法 $v_2/v_1=2$ 飞机航线长度是潜艇航线长度的**2**倍

$$L = 2OP_1 = 2r(\theta_0+2\pi) = 2r_0 e^{2\pi/\sqrt{3}}$$

r_0最小时(r_0=2)航线最短(AP_0^*和$P_0^*P_1^*$) $L_1 = 4e^{2\pi/\sqrt{3}} \approx 150$

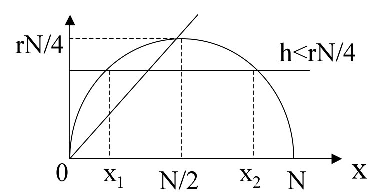
$r_0 = 2\sqrt{3}$ 时航线光滑 $L_2 = 4\sqrt{3}e^{2\pi/\sqrt{3}} \approx 260$

第**6**章第**3**题 捕鱼模型 $\dot{x} = F(x) = rx(1-x/N)-h$

$h<rN/4$, 平衡点x_1, x_2

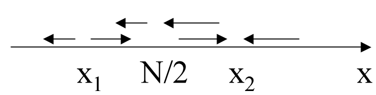
$h=rN/4$, 平衡点$N/2$

$h>rN/4$, 无平衡点



平衡点稳定性 $F'(x_1)>0$, x_1不稳定 $F'(x_2)<0$, x_2稳定

$F'(N/2)=0$, $N/2$稳定？



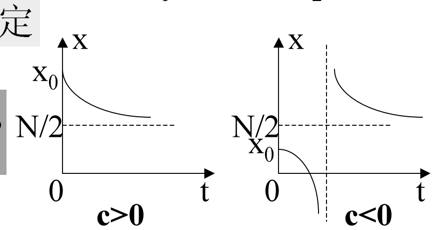
$x_2 \to N/2,\ F'<0$

$x_1 \to N/2,\ F'<0$

$N/2$不稳定

$x = \frac{1}{rt/N+c} + \frac{N}{2} \to \frac{N}{2}(t\to\infty)?$

$c = (x_0 - N/2)^{-1}$



第**15**题 葡萄糖注射

基本模型 $\dot{g}(t) = r / v - \alpha g$

g ~ 浓度, r ~ 注射速率, v ~ 血液体积, $\alpha(>0)$ ~ 常数

设$v = v_0$, 平衡点$g_0 = r / \alpha v_0$稳定

设$\dot{v} = k$ (即$v = v_0 + kt$), $\begin{matrix} \dot{g}(t) = r / v - \alpha g \\ \dot{v}(t) = k \end{matrix}$ 无平衡点

$\dot{g}(t) = r /(v_0 + kt) - \alpha g$ 不是自治方程

设$\dot{v} = k(v_1 - v)$, $\begin{matrix} \dot{g}(t) = r / v - \alpha g \\ \dot{v}(t) = k(v_1 - v) \end{matrix}$ 平衡点$(r / \alpha v_1, v_1)$稳定