定理：式(1)成立:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\pi \tag{1}$$

证明：按照式(2)定义函数$f(t)$:

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\varepsilon(t+0.5T_0+kT)-\varepsilon(t-0.5T_0+kT)\right) \tag{2}$$

其中: T_0 和 T 都是大于零的常数，且 $T_0<T$.

根据式(2)可以得到式(3):

$$\begin{aligned}f(t+T)&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\varepsilon(t+T+0.5T_0+kT)-\varepsilon(t+T-0.5T_0+kT)\right)\\&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\varepsilon(t+0.5T_0+(k+1)T)-\varepsilon(t+T-0.5T_0+(k+1)T)\right]\\&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\varepsilon(t+0.5T_0+kT)-\varepsilon(t-0.5T_0+kT)\right)\end{aligned}$$

$$f(t+T)=f(t) \tag{3}$$

式(3)说明函数 f 是以 T 为周期的周期函数，再根据周期函数的付立叶级数展开公式可以得到式(4):

$$\begin{aligned}f(t)=&\frac{1}{T}\int_{-0.5T}^{0.5T}f(s)ds+\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\cos 2k\pi T^{-1}t\int_{-0.5T}^{0.5T}f(s)\cos 2k\pi T^{-1}s\,ds\right)\\&+\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sin 2k\pi T^{-1}t\int_{-0.5T}^{0.5T}f(s)\sin 2k\pi T^{-1}s\,ds\right)\end{aligned} \tag{4}$$

将式(2)代入式(4)，得到式(5):

$$\begin{aligned}f(t)=&\frac{1}{T}\int_{-0.5T}^{0.5T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\varepsilon(s+0.5T_0+kT)-\varepsilon(s-0.5T_0+kT)\right)ds\\&+\frac{2}{T}\sum_{l=1}^{+\infty}\left[\cos 2l\pi T^{-1}t\int_{-0.5T}^{0.5T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\varepsilon(s+0.5T_0+kT)-\varepsilon(s-0.5T_0+kT)\right)\cos 2l\pi T^{-1}s\,ds\right]\\&+\frac{2}{T}\sum_{l=1}^{+\infty}\left[\sin 2l\pi T^{-1}t\int_{-0.5T}^{0.5T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\varepsilon(s+0.5T_0+kT)-\varepsilon(s-0.5T_0+kT)\right)\sin 2l\pi T^{-1}s\,ds\right]\\=&\frac{1}{T}\int_{-0.5T_0}^{0.5T_0}1\cdot ds+\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\cos 2k\pi T^{-1}t\int_{-0.5T_0}^{0.5T_0}\cos 2k\pi T^{-1}s\cdot ds\right)\\&+\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sin 2k\pi T^{-1}t\int_{-0.5T_0}^{0.5T_0}\sin 2k\pi T^{-1}s\cdot ds\right)\\=&\frac{1}{T}s\Big|_{s=-0.5T_0}^{s=0.5T_0}+\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{\sin 2k\pi T^{-1}s}{2k\pi T^{-1}}\right)\Big|_{s=-0.5T_0}^{s=0.5T_0}\cos 2k\pi T^{-1}t\right]\\&-\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{\cos 2k\pi T^{-1}s}{2k\pi T^{-1}}\right)\Big|_{s=-0.5T_0}^{s=0.5T_0}\sin 2k\pi T^{-1}t\right]\end{aligned}$$

$$f(t)=\frac{T_0}{T}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2\sin k\pi T^{-1}T_0}{k\pi}\cos 2k\pi T^{-1}t\right) \tag{5}$$

根据式(5)可进一步得到式(6):

$$f(0)=\frac{T_0}{T}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2\sin k\pi T^{-1}T_0}{k\pi}\cdot 1\right)=\frac{T_0}{T}+\frac{2T_0}{T}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin k\pi T^{-1}T_0}{k\pi T^{-1}T_0}$$

$$=\frac{T_0}{T}\cdot\frac{\sin 0\times\pi T^{-1}T_0}{0\times\pi T^{-1}T_0}+\frac{T_0}{T}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin k\pi T^{-1}T_0}{k\pi T^{-1}T_0}+\frac{T_0}{T}\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{\sin k\pi T^{-1}T_0}{k\pi T^{-1}T_0}$$

$$f(0)=\frac{T_0}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin k\pi T^{-1}T_0}{k\pi T^{-1}T_0} \tag{6}$$

由式(2)可以得到式(7):

$$f(0)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\varepsilon\left(0.5T_0+kT\right)-\varepsilon\left(-0.5T_0+kT\right)\right)=\varepsilon\left(0.5T_0\right)-\varepsilon\left(-0.5T_0\right)$$

$$f(0)=1 \tag{7}$$

将式(7)代入式(6)，得到式(8):

$$1=\frac{T_0}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin k\pi T^{-1}T_0}{k\pi T^{-1}T_0}$$

$$\pi=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin k\pi T^{-1}T_0}{k\pi T^{-1}T_0}\cdot\frac{\pi T_0}{T}\right) \tag{8}$$

按照式(9)定义常数 Δt :

$$\Delta t=\frac{T_0}{T}\pi \tag{9}$$

按照式(10)定义函数 $g(t)$:

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin t}{t}, & \text{if } t\neq 0\\ 1 , & \text{if } t=0\end{cases} \tag{10}$$

将式(9)和(10)代入式(8)，得到式(11):

$$\pi=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}g\left(k\Delta t\right)\Delta t=\lim_{T_0\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}g\left(k\Delta t\right)\Delta t$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}g\left(k\Delta t\right)\Delta t=\pi \tag{11}$$

由定积分的定义可以得到式(12):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)dt=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}g\left(k\Delta t\right)\Delta t \tag{12}$$

将式(10)代入式(12)，得到式(13):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}g\left(k\Delta t\right)\Delta t \tag{13}$$

将式(13)代入式(11)，得到式(14):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\pi \tag{14}$$

式(14)就是式(1)，因而定理得证. Q.E.D.