证明角谷猜想是正确的

邹山中
广州市天河路 228 号 2106 室
(E-mail：75473066@qq.com)

摘 要 假设角谷猜想不正确，那么可将自然数分为两种数的集合，满足角谷猜想的自然数集记为集合 B，不满足角谷猜想的自然数集记为集合 H，，通过对 H 中的数进行角谷运算，证明了角谷猜想是正确的。

关键词 角谷算法；B 集合；H 集合
MR (2010) **主题分类** 11R04 **中图分类** O156.1

1. 预备工作

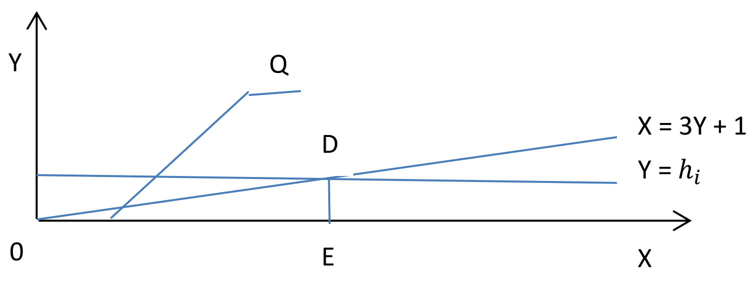
$$\text{角谷算法，}\quad f(n)\begin{cases} n/2 & \text{如果 } n\equiv 0(\text{mod}2)\\ 3n+1 & \text{如果 } n\equiv 1(mod3)\end{cases}$$

角谷猜想任给一自然数通过角谷算法后最后都将进入$4\to 2\to 1\to 4$的循环中。
假设角谷猜想不正确，则有：
定义 1 角谷数集 B，非角谷数集 H。
设 N 是自然数集，把 N 分成 B ,H 两个数集：
1，满足角谷猜想的自然数，记为集合 B
$\mathrm{B}\ =\{b_1,b_2,b_3,b_4,\ldots\ldots b_i\}$，　$b_1=1,\ b_2=2,\ b_3=3,\ b_4=4\ldots b_i\to\infty$
2，不满足角谷猜想的自然数称为非角谷数集，记为集合 H
$\mathrm{H}\ =\{h_1,h_2,\ h_3,h_4\ ,\ldots\ldots h_i\}$
显然有 $\mathrm{B}\ \cup\mathrm{H}=N$，$\mathrm{B}\cap\mathrm{H}=\emptyset$，且 h_1 是奇数， 由于 h_1 是 H 集合中最小自然数，所以凡是小于 h_1 的自然数都在集合 B 中。

2. 命题证明

在集合 $\mathrm{H}=\{h_1,h_2,h_3,h_4,\ldots\ldots h_i\}$ 中， 因为 h_1 是 H 中最小的自然数，且 h_1是奇数。所以有：
引理 一． $h_1=2p+1$ ， $p=2n+1$ ，即：$h_1=2(2n+1)+1=4n+3$ ，并且 $3\,h_1+1$ 不能被 4 整除。

证：如果 $p=2n$，即 $h_1=4n+1$ ，根据角谷算法，$3\times(4n+1)+1=12n+4$
$(12n+4)/2=6n+2$，$(6n+2)/2=3n+1$ ，而 $3n+1<4n+1=\ h_1$ ， $\therefore 3n+1\in\mathrm{B}$，
$\therefore \mathrm{p}\ =2n+1$。因为 $3h_1+1=3(4n+3)+1=\ 12n+10$，而 $(12n+10)/4=3n+5/2$
所以 $3\,h_1+1$不能被 4 整除。 **#**。
为了直观地看到 H 集合中 h_i 在角谷运算过程中的变化情况，我们建立直角坐标系如下：



图中，$\mathrm{Y}=h_i$ 直线与 $X=3Y+1$ 直线相交于 D，过 D 点作垂线与 X 轴交于 E,可得到直角三角

形 D0E，设角 D0E 为 Q，有 $tan\,Q = \frac{Y}{3Y+1}$ ， 设 $DE = Y = h_1$ 则有 $0E = X_1 = 3h_1 + 1$,

X_i与 h_i是一一对应的，当 $DE = h_1$ 时，$tan\,Q = \frac{h_1}{3h_1+1}$ ，因为 $3h_1 + 1$ 是偶数，依照角谷运算法有，$h_2 = \frac{X_1}{2^{n_1}} = \frac{3h_1+1}{2^{n_1}}$， $n_1 \geq 1$, $h_2 \in H$, n_1 的取值取决于 $\frac{3h_1+1}{2^{n_1}}$ 是否是奇数，当 $\frac{3h_1+1}{2^{n_1}}$ 是奇数时n_1是最大值，设：$y = \frac{3h_1+1}{2^{n_1}} = h_2$ ，因为 $tan\,Q = \frac{h_1}{3h_1+1} = \frac{h_2}{X_2}$ 即：

$X_2 = \frac{h_2（3h_1+1）}{h_1}$ 所以 $X_2 = \frac{（3h_1+1）^2}{2^{n_1}h_1}$ ，依照角谷算法有 $h_3 = \frac{X_2}{2^{n_2}} = \frac{(3h_1+1)^2}{h_1 2^{n_1}2^{n_2}}$ ，

此时 $Y = h_3$，$tan\,Q = \frac{h_1}{3h_1+1} = \frac{h_3}{X_3}$ 即： $X_3 = \frac{h_3（3h_1+1）}{h_1} = \frac{（3h_1+1）(3h_1+1)^2}{h_1^2 2^{n_1}2^{n_2}}$

依照角谷算法有 $h_4 = \frac{X_3}{2^{n_3}} = \frac{(3h_1+1)^3}{h_1^2 2^{n_1}2^{n_2}2^{n_3}}$ …… 以此类推有：

$$h_{i+1} = \frac{(3\,h_1+1)^i}{h_1^{i-1}\,2^{n_1+n_2\ldots+n_i}} \quad , (n_1 + n_2 + \cdots n_i) \geq i, \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

当 $n_1 = n_2 = \cdots n_i = 1$ 时，$(n_1 + n_2 \ldots + n_i) = i$ ，设 $(n_1 + n_2 \ldots + n_i) = \beta$, $\beta \geq i$

这样（1）式可写成：$h_{i+1} = h_1 \left(\frac{3h_1+1}{h_1 2^{\beta/i}}\right)^i$ 因为 h_{i+1} 是整数，所以 $\frac{3h_1+1}{h_1 2^{\beta/i}}$ 必须是整数，而$\frac{3\,h_1+1}{h_1}$ 不是整数，所以 $\frac{3\,h_1+1}{2^{\beta/i}}$ 必须是整数，根据引理一，4 不能整除 $(3\,h_1 + 1)$，所以 $2^{\beta/i}$ 只能等于 2，即：$\beta/i = 1$，$\beta = i$，所以 $(n_1 + n_2 \ldots + n_i) = i$， 即有：$n_i = 1$，
$\therefore h_i = 4n + 3$, $\therefore\ p_i = 2n_j + 1$, $\therefore h_1 = 2p_1 + 1 = 2\big(2\big(2 \ldots \big(2n_j + 1\,\big) \ldots + 1\big) + 1\big) + 1$,
$j = 1,2,3\ldots$， $j \to \infty$ 。
证：如果 j 不是无穷大，则在 H 集合中必须出现循环，而（1）出现循环的必要条件是：

$h_1 \left(\frac{3h_1+1}{h_1 2^{\beta/i}}\right)^i = h_1$， 即有 $\left(\frac{3h_1+1}{h_1 2^{\beta/i}}\right)^i = 1$ ， 即 $3h_1 + 1 = h_1 2^{\beta/i}$ ，显然

$3h_1 + 1 = 2h_1$ 等式不成立，所以等式(1)不可能产生从h_1开始的循环，因为$n_i = 1$，所以在 H 集合中任取一h_i 来讨论都会得到同样的结果。$\therefore j \to \infty$, **#**
因为 $j \to \infty$ 所以我们永远无法找到一个h_1 ，满足h_1在 H 集合中作角谷运算，所以非角谷数的集合是不存在的，即 H = $\emptyset$，故角谷猜想是正确的。 证明完！

REFERENCES

[1] Chaohao Gu, Mathematics Dictionary, *Shanghai Dictionary Press*, (1992)