定理 1: 式(1)给出了对于系统的描述:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\ t\geq t_0 \tag{1}$$

其中: $t_0\in\Re$ 是系统的初始时刻, $\boldsymbol{A}\in\Re^{n\times n}$ 是常数矩阵, $\boldsymbol{B}\in\Re^{n\times p}$ 是常数矩阵, $n\in\boldsymbol{N}_+$, $p\in\boldsymbol{N}_+$, $\boldsymbol{x}\in\Re^{n\times 1}$ 是定义在 $\left[t_0,+\infty\right)$ 上的向量值函数, $\boldsymbol{u}\in\Re^{p\times 1}$ 是定义在 $\left[t_0,+\infty\right)$ 上的向量值函数.

式(2)给出了系统的初始条件:

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{2}$$

则式(3)给出了系统的解为:

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t-\xi)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\xi)\mathrm{d}\xi,\ \ t\geq t_0 \tag{3}$$

证明: 由式(1)可以得到式(4):

$$e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$$e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}-e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\ \ t\geq t_0 \tag{4}$$

根据《矩阵指数相关定理合集》定理 1, 可以得到式(5):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\right]=-e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{A},\ \ t\geq t_0 \tag{5}$$

将式(5)代入式(4), 得到式(6):

$$e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}+\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\right]\right\}\boldsymbol{x}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{x}(t)\right]$$

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t_0-\xi)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\xi)\mathrm{d}\xi&=\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[e^{\boldsymbol{A}(t_0-\xi)}\boldsymbol{x}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi=\left[e^{\boldsymbol{A}(t_0-\xi)}\boldsymbol{x}(\xi)\right]\Big|_{\xi=t_0}^{\xi=t}\\&=e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{x}(t)-e^{\boldsymbol{A}(t_0-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)=e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{x}(t)-e^{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{x}(t_0)\end{aligned}$$

$$e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t_0-\xi)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}e^{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{x}(t_0)+e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t_0-\xi)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}e^{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}e^{\boldsymbol{A}(t_0-\xi)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\xi)\mathrm{d}\xi,\ \ t\geq t_0 \tag{6}$$

将式(2)及《矩阵指数相关定理合集》定理 4 式(23)代入式(6), 得到式(7):

$$e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}e^{\boldsymbol{A}(t_0-\xi)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}e^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}e^{\boldsymbol{A}(t_0-\xi)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\xi)\mathrm{d}\xi,\ \ t\geq t_0 \tag{7}$$

其中: $\boldsymbol{O}$ 为 n 行 n 列的零矩阵.

根据式(7)及《矩阵指数相关定理合集》定理 5, 可以得到式(8)

$$e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)+\boldsymbol{A}(t_0-t)}\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)+\boldsymbol{A}(t_0-\xi)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$e^{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t-\xi)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\xi)\mathrm{d}\xi,\ \ t\geq t_0 \tag{8}$$

其中: $\boldsymbol{O}$ 为 n 行 n 列的零矩阵.

根据式(8)及《矩阵指数相关定理合集》定理 4, 可以得到式(9)

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\xi)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\xi)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad t \geq t_0 \tag{9}$$

式(9)给出了式(1)所描述的系统的解. 比较式(3)和式(9), 可知式(3)就是式(1)所描述的系统的解, 因此定理成立. Q.E.D.