设 $\theta$ 是表征转子位置的指标，将 $\theta$ 视为时间 $t$ 的函数 $\theta(t)$，由此得到式(1):

$$\theta=\theta(t) \tag{1}$$

设转子位置 $\theta$ 对于时间 $t$ 的变化率等于转子转速 $\omega(t)$，由此得到式(2):

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=\omega(t) \tag{2}$$

设电机共有 $n$ 个绕组，各绕组磁链分别记为 $\widetilde{\psi}_k$，$k=1,2,\cdots,n-1,n$，并将各绕组磁链均视为转子位置 $\theta$ 与时间 $t$ 的函数 $\widetilde{\psi}_k(\theta,t)$，$k=1,2,\cdots,n-1,n$，由此得到式(3):

$$\widetilde{\psi}_k=\widetilde{\psi}_k(\theta,t),\ k=1,2,\cdots,n-1,n \tag{3}$$

按照式(4)定义向量值函数 $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}(\theta,t)\in\Re^{n\times1}$，并将向量值函数 $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}$ 称为磁链向量:

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}(\theta,t)=\left[\widetilde{\psi}_1(\theta,t)\ \ \widetilde{\psi}_2(\theta,t)\ \ \cdots\ \ \widetilde{\psi}_{n-1}(\theta,t)\ \ \widetilde{\psi}_n(\theta,t)\right]^T \tag{4}$$

将电机各绕组电流分别记为 $i_k$，$k=1,2,\cdots,n-1,n$，并设流出电机，进入外部电网络的方向为电流正方向. 将各绕组电流视为时间 $t$ 的函数 $i_k(t)$，$k=1,2,\cdots,n-1,n$，由此得到式(5):

$$i_k=i_k(t),\ k=1,2,\cdots,n-1,n \tag{5}$$

按照式(6)定义向量值函数 $\boldsymbol{i}(t)\in\Re^{n\times1}$，并将向量值函数 $\boldsymbol{i}$ 称为电流向量:

$$\boldsymbol{i}(t)=\left[i_1(t)\ \ i_2(t)\ \ \cdots\ \ i_{n-1}(t)\ \ i_n(t)\right]^T \tag{6}$$

假设电机中磁路是线性的，那么存在与转子位置 $\theta$ 相关的矩阵 $\boldsymbol{L}$，使得磁链向量 $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}$ 能够被电流向量 $\boldsymbol{i}$ 线性表示出来，由此得到式(7)所给出的磁链方程:

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}(\theta,t)=-\boldsymbol{L}(\theta)\boldsymbol{i}(t) \tag{7}$$

其中: $\boldsymbol{L}(\theta)\in\Re^{n\times n}$.

假设电机中磁路是物理可实现的，那么矩阵 $\boldsymbol{L}$ 是对称矩阵，由此得到式(8):

$$\boldsymbol{L}^T=\boldsymbol{L} \tag{8}$$

因为转子位置 $\theta$ 是时间 $t$ 的函数，那么各绕组磁链从形式上可视为时间 $t$ 的一元函数，进一步可知，电机的磁链向量也可视为时间 $t$ 的一元向量值函数. 将仅与时间 $t$ 有关的磁链向量记为 $\boldsymbol{\psi}(t)$，再根据同一时刻磁链向量 $\widetilde{\boldsymbol{\psi}}$ 与磁链向量 $\boldsymbol{\psi}$ 在数值上相等的关系，得到式(9):

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\psi}(t)=\widetilde{\boldsymbol{\psi}}(\theta(t),t)\\ \boldsymbol{\psi}(t)=\widetilde{\boldsymbol{\psi}}(\theta,t)\big|_{\theta=\theta(t)}\end{gathered} \tag{9}$$

将式(9)代入式(7)，得到式(10):

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\psi}(t)=-\boldsymbol{L}(\theta(t))\boldsymbol{i}(t)\\ \boldsymbol{\psi}(t)=-\boldsymbol{L}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\boldsymbol{i}(t)\end{gathered} \tag{10}$$

根据式(10)可以得到式(11):

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt}=-\frac{d\theta(t)}{dt}\cdot\left.\frac{d\boldsymbol{L}(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta(t)}\boldsymbol{i}(t)-\boldsymbol{L}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt} \tag{11}$$

将式(2)代入式(11)，得到式(12):

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt}=-\omega(t)\left.\frac{d\boldsymbol{L}(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta(t)}\boldsymbol{i}(t)-\boldsymbol{L}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt} \tag{12}$$

将电机内部磁场的能量记为 $E_{\mathrm{mag}}$，并把能量 $E_{\mathrm{mag}}$ 视为时间 $t$ 的函数 $E_{\mathrm{mag}}(t)$，按照式(13)计算能量 $E_{\mathrm{mag}}(t)$ 的数值:

$$E_{\mathrm{mag}}(t)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}^T(t)\boldsymbol{i}(t) \tag{13}$$

将电机各绕组位于电机内部的电阻分别记为 $r_k$ , $k=1,2,\cdots,n-1,n$ , 按照式(14)定义 $n$ 行 $n$ 列矩阵 $\boldsymbol{R}$ :

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & r_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & r_n \end{bmatrix} \tag{14}$$

由式(14)得到式(15):

$$\boldsymbol{R}^T=\boldsymbol{R} \tag{15}$$

将电机各绕组与外部电网络接口处的电压记为 $u_k$ , $k=1,2,\cdots,n-1,n$ , 并假设各绕组的电压正方向应当使得该绕组向外部电网络注入正的功率, 同时将各绕组电压视为时间 $t$ 的函数. 根据这样的约定, 得到由式(16)给出的各绕组电压方程:

$$u_k(t)=\frac{d}{dt}\tilde{\psi}_k(\theta,t)\bigg|_{\theta=\theta(t)}-r_k i_k(t),\ \ k=1,2,\cdots,n-1,n \tag{16}$$

按照式(17)定义向量值函数 $\boldsymbol{u}(t)\in\Re^{n\times 1}$, 并将向量值函数 $\boldsymbol{u}$ 称为电压向量:

$$\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_{n-1}(t) & u_n(t) \end{bmatrix}^T \tag{17}$$

根据电压向量 $\boldsymbol{u}$, 电流向量 $\boldsymbol{i}$, 磁链向量 $\boldsymbol{\psi}$ 和矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的定义, 以及式(16)可以得到式(18):

$$\boldsymbol{u}(t)=\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt}-\boldsymbol{R}\boldsymbol{i}(t) \tag{18}$$

将电机注入外部交流电网的功率记为 $P_{\text{inj}}$, 并把功率 $P_{\text{inj}}$ 视为时间 $t$ 的函数 $P_{\text{inj}}(t)$. 式(19)给出了功率 $P_{\text{inj}}$, 电压向量 $\boldsymbol{u}$ 与电流向量 $\boldsymbol{i}$ 的关系:

$$P_{\text{inj}}(t)=\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{i}(t) \tag{19}$$

将电机内部的铜耗记为 $P_{\text{loss}}$, 并把功率 $P_{\text{loss}}$ 视为时间 $t$ 的函数 $P_{\text{loss}}(t)$, 式(20)给出了功率 $P_{\text{loss}}$, 电流向量 $\boldsymbol{i}$ 与矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的关系:

$$P_{\text{loss}}(t)=\boldsymbol{i}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{i}(t) \tag{20}$$

将电机内部磁场能量 $E_{\text{mag}}$ 对时间 $t$ 的变化率记为 $P_{\text{field}}$, 根据功率 $P_{\text{field}}$ 的定义可以得到式(21):

$$P_{\text{field}}(t)=\frac{dE_{\text{mag}}(t)}{dt} \tag{21}$$

将电机电磁功率记为 $P_{\text{em}}$, 并把功率 $P_{\text{em}}$ 视为时间 $t$ 的函数 $P_{\text{em}}(t)$. 根据能量守恒定律可知, 在忽略铁耗和机械损耗的情况下, 电磁功率 $P_{\text{em}}$ 等于功率 $P_{\text{inj}}$, $P_{\text{loss}}$ 与 $P_{\text{field}}$ 的和, 由此得到式(22):

$$P_{\text{em}}(t)=P_{\text{inj}}(t)+P_{\text{loss}}(t)+P_{\text{field}}(t) \tag{22}$$

将式(18)代入式(19), 得到式(23):

$$P_{\text{inj}}(t)=\left(\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt}-\boldsymbol{R}\boldsymbol{i}(t)\right)^T\boldsymbol{i}(t)=\left[\left(\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt}\right)^T-\boldsymbol{i}^T(t)\boldsymbol{R}^T\right]\boldsymbol{i}(t)$$

$$P_{\text{inj}}(t)=\left(\frac{d\boldsymbol{\psi}^T(t)}{dt}\right)^T\boldsymbol{i}(t)-\boldsymbol{i}^T(t)\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{i}(t) \tag{23}$$

将式(15)代入式(23), 得到式(24):

$$P_{\text{inj}}(t)=\left(\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt}\right)^T\boldsymbol{i}(t)-\boldsymbol{i}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{i}(t) \tag{24}$$

将式(13)代入式(21)，得到式(25)：

$$P_{\text{field}}(t)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}^{T}(t)\boldsymbol{i}(t)\right)$$

$$P_{\text{field}}(t)=-\frac{1}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt}\right)^{T}\boldsymbol{i}(t)-\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}^{T}(t)\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}\tag{25}$$

将式(20), (24)和(25)代入式(22)，得到式(26)：

$$P_{\text{em}}(t)=\left(\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt}\right)^{T}\boldsymbol{i}(t)-\boldsymbol{i}^{T}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{i}(t)+\boldsymbol{i}^{T}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{i}(t)-\frac{1}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt}\right)^{T}\boldsymbol{i}(t)-\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}^{T}(t)\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}$$

$$P_{\text{em}}(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt}\right)^{T}\boldsymbol{i}(t)-\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}^{T}(t)\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}\tag{26}$$

将式(10)和(12)代入式(26)，得到式(27)：

$$\begin{aligned}P_{\text{em}}(t)&=\frac{1}{2}\left(-\omega(t)\frac{d\boldsymbol{L}(\theta)}{d\theta}\bigg|_{\theta=\theta(t)}\boldsymbol{i}(t)-\boldsymbol{L}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}\right)^{T}\boldsymbol{i}(t)\\&\quad-\frac{1}{2}\left(-\boldsymbol{L}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\boldsymbol{i}(t)\right)^{T}\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}\\&=-\frac{1}{2}\left[\omega(t)\boldsymbol{i}^{T}(t)\left(\frac{d\boldsymbol{L}(\theta)}{d\theta}\right)^{T}\bigg|_{\theta=\theta(t)}+\left(\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}\right)^{T}\boldsymbol{L}^{T}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\right]\boldsymbol{i}(t)\\&\quad+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}^{T}(t)\boldsymbol{L}^{T}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{\text{em}}(t)&=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}^{T}(t)\boldsymbol{L}^{T}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}-\frac{1}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}\right)^{T}\boldsymbol{L}^{T}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\boldsymbol{i}(t)\\&\quad-\frac{1}{2}\omega(t)\boldsymbol{i}^{T}(t)\frac{d\boldsymbol{L}^{T}(\theta)}{d\theta}\bigg|_{\theta=\theta(t)}\boldsymbol{i}(t)\end{aligned}\tag{27}$$

将式(8)代入式(27)，得到式(28)：

$$\begin{aligned}P_{\text{em}}(t)&=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}^{T}(t)\boldsymbol{L}^{T}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}-\frac{1}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}\right)^{T}\boldsymbol{L}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\boldsymbol{i}(t)\\&\quad-\frac{1}{2}\omega(t)\boldsymbol{i}^{T}(t)\frac{d\boldsymbol{L}(\theta)}{d\theta}\bigg|_{\theta=\theta(t)}\boldsymbol{i}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{\text{em}}(t)&=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}^{T}(t)\boldsymbol{L}^{T}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{i}^{T}(t)\boldsymbol{L}^{T}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}\right)^{T}\\&\quad-\frac{1}{2}\omega(t)\boldsymbol{i}^{T}(t)\frac{d\boldsymbol{L}(\theta)}{d\theta}\bigg|_{\theta=\theta(t)}\boldsymbol{i}(t)\end{aligned}\tag{28}$$

矩阵乘积$\boldsymbol{i}^{T}(t)\boldsymbol{L}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}$是一个标量，而标量的转置等于其自身，由此得到式(29)：

$$\left(\boldsymbol{i}^{T}(t)\boldsymbol{L}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}\right)^{T}=\boldsymbol{i}^{T}(t)\boldsymbol{L}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}\tag{29}$$

将式(29)代入式(28)，得到式(30)：

$$\begin{aligned}P_{\text{em}}(t)&=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}^{T}(t)\boldsymbol{L}^{T}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}^{T}(t)\boldsymbol{L}^{T}(\theta)\big|_{\theta=\theta(t)}\frac{d\boldsymbol{i}(t)}{dt}\\&\quad-\frac{1}{2}\omega(t)\boldsymbol{i}^{T}(t)\frac{d\boldsymbol{L}(\theta)}{d\theta}\bigg|_{\theta=\theta(t)}\boldsymbol{i}(t)\end{aligned}$$

$$P_{\mathrm{em}}(t)=-\frac{1}{2}\left(\omega(t)\boldsymbol{i}^{T}(t)\frac{d\boldsymbol{L}(\theta)}{d\theta}\boldsymbol{i}(t)\right)\Bigg|_{\theta=\theta(t)} \tag{30}$$

按照式(31)定义电机电磁转矩 $M_{\mathrm{em}}$:

$$M_{\mathrm{em}}(t)=\frac{P_{\mathrm{em}}(t)}{\omega(t)} \tag{31}$$

将式(30)代入式(31)，得到式(32):

$$M_{\mathrm{em}}(t)=-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{i}^{T}(t)\frac{d\boldsymbol{L}(\theta)}{d\theta}\boldsymbol{i}(t)\right)\Bigg|_{\theta=\theta(t)} \tag{32}$$