

参赛密码 _____

(由组委会填写)

第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校

解放军理工大学

参赛队号

90006007

队员姓名

1.许晓明

2.刘彦涵

3.蔡 洋

(由组委会填写)



第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 微蜂窝环境中无线接收信号的特性分析

摘 要：

在城市中，建筑物的几何形态、密度以及分布情况直接影响着无线信号的接收质量。微蜂窝环境中无线接收信号的特征分析，本质上就是要分析和计算传播路径和多波干涉对接收信号特征的影响。我们以确定性模型为基础、随机性模型为扩展的思路对问题开展研究。

针对问题一，在二维空间、规则地物、镜面反射等假设条件下，构建了确定性的传播模型。采用虚拟镜像方法，获得从源点至场点的全部可达路径，针对收发坐标为(500,200)、(250,350)的情况，可达路径共 97 条（见论文附录 1）。虚拟镜像方法通过搜寻可见面确定可能路径并递归回溯剔除不可达路径，成功避免了因物理反射面与有效反射面的差异而造成的路径误判问题，具备对角度量化精度、量化初值以及接收区域大小等因素不敏感的优点。此外，从本质上对角度量化误差进行了深入剖析，分析了角度量化误差产生的原因，确定了运算复杂度与量化精度之间的折中关系，并分别给出了基于等效照射角和基于出射路径最小邻域的两种角度量化原则。

针对问题二，以确定性传播模型为基础，运用虚拟镜像方法，求得 25 种不同收发位置组合情况中，收发信机坐标为(400,350)、(450,275)时，传输路径最

多，为 483 条；收发信机坐标为(500,350)、(450,200)时，传输路径最少，为 69 条。不同情况的传输特性对比表明，仅依靠反射到达接收端的可达路径极少，绕射和反射组合方式的可达路径最多（见表 1）。

针对问题三，对比 25 种不同收发机位置组合，对确定性传播模型传输路径的规律总结如下：1）发射端具有较多的一次可达绕射点、可见面时（如位于交通路口的情形），收发之间具有更多的传输路径（见表 3）；2）收发之间的传输特征会受周围建筑物的遮挡影响，遮挡越小，收发之间的可达路径越多（见表 4）；3）在可达路径中，某种绕射-反射的组合路径很少，因此在有些对精度要求不高的场合可以将这些组合情况忽略不计（见表 2）；4）若不考虑经过 5 次以上反射的可达路径，对可达路径总数的影响非常小，却可以大幅压缩运算复杂度。

针对问题四，在确定性模型的相关性分析基础上，通过对初始出射角引入在 $[0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机相位，构建随机性传播模型。通过挖掘不同传播路径之间的内在关系，求解了不同路径之间的相关系数。建立合成波振幅，分析了其一阶、二阶矩特性，并结合各径振幅之间的函数关系，使用参数估计方法获得了合成波振幅的概率密度函数。当各传输路径的衰减程度相当时，由于路径数量很大，根据中心极限定理，合成路径的振幅服从瑞利分布，我们采用数值仿真方法验证该结论，并估计得到了瑞利分布的参数（见表 11）。

针对问题五，在确定性模型条件下分析了相同物理环境下，不同可达路径随频率的变化规律，推导了当前模型下的包络表达式，并分析了包络所具有的特征。基于传播主径的概念，提出了一种基于相关性的可达路径分类方法，通过对一簇路径的振幅和相位引入随机构建了新的随机传输模型，利用相关系数求解主径平均接收强度和平均延时，构建了密集环境下的近似信道传输模型，结果表明不同频率点处衰落不一样但在一定带宽内具有相关性，该模型对工程实践具有指导意义。

目录

一、	问题重述.....	- 5 -
1.1	基本问题.....	- 5 -
1.2	宽带问题.....	- 6 -
二、	基本假设.....	- 6 -
三、	符号说明.....	- 6 -
四、	问题分析.....	- 7 -
五、	模型的建立.....	- 7 -
六、	基本问题的求解.....	- 8 -
6.1	虚拟源的概念简介.....	- 8 -
6.2	基于递归回溯和反向联合检验的路径追踪算法.....	- 9 -
6.2.1	源点辐射离散化求解路径的缺陷.....	- 9 -
6.2.2	递归回溯算法.....	- 9 -
6.2.3	反向检验：虚拟源的有效性判别.....	- 10 -
6.3	模型二：基于有效辐射密度的场强累加模型.....	- 11 -
6.4	模型求解.....	- 11 -
6.4.1	运用搜寻完全可见面法确定虚拟源.....	- 11 -
6.4.2	传输路径确定.....	- 11 -
6.5	传输路径计算结果及分析.....	- 12 -
6.6	接收机处的场强计算.....	- 15 -
6.7	运用场强分布探寻 25 种收发组合情形的规律.....	- 16 -
6.8	发射角的量化精度讨论.....	- 17 -
6.8.1	基于等效照射角的角度量化模型.....	- 17 -
6.8.2	基于出射路径最少邻域的角度量化模型.....	- 18 -
6.9	算法评价：误差来源及稳定度分析.....	- 20 -
七、	宽带问题的分析与求解.....	- 21 -
7.1	相位与振幅确定情况下多波干涉的初步分析.....	- 21 -
7.2	相位随机扰动对单频多波干涉的影响分析.....	- 24 -
7.3	蒙特卡洛实现.....	- 26 -
7.4	概率密度函数分析.....	- 28 -
八、	基于传播主径的近似信道建模.....	- 32 -
8.1	基于相关分类的传播主径确定.....	- 33 -
8.2	宽带信号的统计分析.....	- 34 -
	参考文献.....	- 38 -

一、 问题重述

近年来,随着移动通信的发展,对系统容量的要求越来越高,频谱资源越来越紧缺。若没有良好的传播预测模型,划分小区、选择基站位置和高度的唯一方法就是通过实际测量、反复测试。显然这需要投入大量的人力、时间,费用也会很高。目前,比较有代表性的就是射线跟踪模型。射线跟踪是一种按光学方法辨认出多路径信道中收、发射机间所有主要的传播路径的方法,一旦这些传播路径被辨认后,就可根据电波传播理论来计算每条传播路径信号的幅度、相位、延迟和极化,然后结合天线方向图和系统带宽就可得到到达接收点的所有传播路径的相干合成结果。

城市环境下基站天线低于周围建筑物的高度,电波经过屋顶绕射后再到达地面接收点的射线路径数量非常少,往往可以忽略,地面的反射也不考虑。因此,可以假设微蜂窝环境下建筑物的高度高于基站天线的高度,从而将三维问题近似地简化成二维问题,只考虑两种传播机制:反射和绕射。这种简化大大地提高了射线跟踪模型的预测效率,同时能够得到可以接受的预测精度。

对于城市微蜂窝的二维模型,建筑群可被划分为一定的“块”,多边形的“边”代表建筑物的表面,多边形的“顶点”则代表了建筑物的拐角。这种简化了的市区平面图大致反映出城市的主体结构,利用它进行射线跟踪,可以得到较为准确的路径损耗。在多边形的顶点上仅能产生绕射,而在多边形的边上仅能产生反射,这些多次的反射、绕射及其组合便是收、发射机间的传播路径。仅考虑下列收、发射机间传播路径:

- 只存在反射,且反射次数不超过 7 次;
- 只存在绕射,且绕射次数不超过 2 次;
- 一次绕射与一次、两次、三次或四次反射的任意组合;
- 两次绕射和一次反射的任意组合。

本题从发射天线出发,考虑非视距传播的路径,沿着射线路径推进计算,直至到达接收点,求得此条射线路径在接收点处对总场强的贡献。涉及到一下具体问题:

1.1 基本问题

- (1) 电波从发射天线出发,向空间各个方向均匀发射。为了能够进行数值计算,我们需要将总的发射能量均匀地分配到若干条射线上,这个过程称之为发射角量化过程。显然,规定的射线条数越多,量化就越精细,计算量也就越大。因此请根据实际情况,首先选择定量化的精细程度,然后跟踪确定发射机 Tx (坐标为(500, 200))和接收机 Rx (坐标为(250, 350))间的主要传播路径。
- (2) 在路径 AB (两点坐标分别为(300, 350)和(500, 350)) 上以 50m 为间隔取 5 个位置准备放置发射机;在路径 CD (两点分别为(450, 300)和(450, 200)) 上以 25m 为间隔取 5 个位置准备放置接收机;这样有 25 种发射机-接收机组合。研究哪一个组合收发机间的

传播路径最多，哪一个组合最少？

- (3) 将(2)中所有发射机-接收机组合的传播路径进行比对，探寻尽可能多的规律。

1.2 宽带问题

- (4) 两个或两个以上的波相遇时，在一定情况下会相互影响，这种现象叫干涉现象。对于(2)中提到的 CD 路径上的所有接收点，多波干涉形成的接收信号可以描述为

$$f(\omega, t) = \sum_{i=1}^Q A_i e^{j(\omega t + k r_i)}$$

针对上述 25 种情况，对这种多波干涉的振幅 $|f(\omega, t)|$ 进行统计学分析，包括：一、二阶矩特性，不同路径到达信号的相关性及概率密度分布函数；

- (5) 从发射机同时发射一组功率相同的电波，频率从 2000Mhz 到 2100Mhz，间隔近似 1Mhz，这样总共要同时发射 101 个单频信号。每个单频信号都会形成(4)中提到多波干涉问题，多个单频信号会形成宽带多波干涉现象，对这种宽带多波干涉现象进行数学建模，并分析合成波的包络统计特性，如同一频率、不同路径信号之间，同一路径、不同频率信号之间的相关性等。

二、 基本假设

-
- 1、仅考虑电磁波的直射、反射以及绕射三种传播情况，忽略其他复杂电磁环境的影响；
 - 2、当在尖劈处发生绕射时，不考虑绕射线沿绕射点所在劈边界传播的情况；
 - 3、忽略建筑物的细节，使用简单的点、面来建立小区简易的 2D 模型；
 - 4、收发之间的信号传输简化为点到点的传输；
 - 5、空间点源发射的是柱面波，经过发射后为平面波，经过绕射后仍未柱面波。
-

三、 符号说明

Ω	空间角度
θ	平面角度
χ	外部环境变量
T_x	源点坐标
R_x	场点坐标
ρ_E	有效辐射密度
E	接收场强

四、 问题分析

电波传播预测需要有传播预测模型，接收点信号的功率虽然可以通过实地测量获得，但是费时费力，而根据传播模型可以直接计算出接收点的接收功率和传播损耗。微蜂窝环境中无线接收信号的特性分析关键在于如何找到电波传播预测模型。随着移动通信技术的快速发展，移动通讯服务呈现爆炸式增长，随着微小区和微微小区的应用，小区范围越来越小，使得电波传播环境变得多样化，传统的电波传播预测模型不再具备可复用性，电波传播损耗的预测精度下降。

本题从基本问题及宽带问题入手，试探究电波传播预测模型中的一些规律。虚拟源镜像法是一种被广泛用于移动通信环境(室外微蜂窝、微微蜂窝和室内微微蜂窝)中的、主要研究和预测无线电波传播特性的技术。

采用路径追踪法，从发射源出发，利用镜像原理，找到可以产生反射的有效边界，产生二级镜像源，依次往下传播，最终可以找到从发射源到达目标的所有路线。当有 25 个的发射-接收位置，根据上述分析，仅需通过重复上述计算就可以得到计算结果。分析上述传播路径，在不同的传播路径中，通过改变传播特性参数，对比不同情况同一信息要素的情况，能够找到其分布的特性，从而探寻其中的规律。

针对问题四，已知不同路径的传播情况，通过挖掘不同传播路径之间的内在关系，求解了不同路径之间的相关系数，从而分析了其一阶、二阶矩特性，并结合各径振幅之间的函数关系，使用参数估计方法获得了合成波振幅的概率密度函数。

针对问题五，在前面已知的确定性模型条件下，分析了相同物理环境下，不同可达路径随频率的变化规律，尝试推导当前模型下的包络表达式。对不同的可达路径考察其相关性，探索不同频率下的信号传输规律。通过对上述方面进行研究，试图从中发现对工程实践具有指导意义的规律。

五、 模型的建立

研究微蜂窝环境中无线接收信号的特性根本上是获得接收点处的场强随物理环境、源点场点的位置、信号频率等参数的变化规律。对于给定源点、场点位置和信号参数，由于物理环境的不同，源点对场点的功率贡献将不同；而对于某一给定的物理环境、位置和信号参数，即便源点以均匀的方式向周围空间辐射电磁波，不同方向辐射的电磁信号，由于经过不同反射、绕射等复杂的传输过程，其对场点的功率贡献也将呈现出明显的差异。因此，我们进行如下定义：

定义一：有效辐射功率。有效辐射功率是指在给定的物理环境、发射接收位置、信号频率等参数下，源点对场点的实际功率贡献；

定义二：等效辐射增益。由于实际物理环境（源、场点所处区域周围障碍物的位置、形状、

规模等)、源、场点位置等客观因素的影响,源点沿不同方向出射的电磁波对场点功率的贡献程度定义为等效辐射增益,而等效辐射增益随出射方向的变化关系定义为等效辐射增益函数。

不难发现,当收发位置、物理环境或者发射信号本身发生改变时,接收功率也会随之发生变化,即有效辐射功率:

$$p_{ef}(\Omega) = G[s(t); \chi, \overline{T_x}, \overline{R_x}] \quad (1)$$

其中, χ 为外部环境因素(主要指建筑等障碍物的地形地貌等),是一个广义变量, $\overline{T_x}, \overline{R_x}$ 分别为收发的坐标位置, $s(t)$ 为发射信号, $G(\cdot)$ 表示的是有效辐射密度与上述三个变量之间存在的广义函数关系。

显然有效辐射功率与等效辐射增益函数间存在如下关系:

$$\begin{cases} d_E(\Omega) = D(\Omega; \chi, \overline{T_x}, \overline{R_x}) \\ p_{ef} = \int_{\Omega} d_E(\Omega) p_s(\Omega) d\Omega \end{cases} \quad (2)$$

其中, Ω 为空间角度。当信号源沿着某一空间角度向空间辐射电磁波时,有效辐射功率为0,则 $G(\cdot)=0$,而沿某一方向辐射时的功率贡献度越大,则该方向上的等效辐射增益越高。最终实际的接收功率是关于发射功率和等效辐射增益函数的空间角度积分。如果仅考虑二维情况,上述模型调整为:

$$\begin{cases} d_E(\theta) = D(\theta; \chi, \overline{T_x}, \overline{R_x}) \\ p_{ef} = \int_0^{2\pi} d_E(\theta) p(\theta) d\theta \end{cases} \quad (3)$$

式中 $p(\theta)$ 为发射功率。

而当源点呈均匀辐射时

$$\begin{cases} d_E(\theta) = D(\theta; \chi, \overline{T_x}, \overline{R_x}) \\ p_{ef} = p \int_0^{2\pi} d_E(\theta) d\theta \end{cases} \quad (4)$$

六、基本问题的求解

根据模型一的分析,接收机的场强与收发位置、具体信号以及外界环境等因素有关,遍历所有的传输路径是不现实的,并且由于相当一部分传输路径是无效的,将这一部分考虑在内会使计算效率大大降低。反过来,如果从可传输路径出发,就可以很大程度上解决一些不可能的传播情况,那么上述模型就简化为求若干离散情况下的场强叠加问题,从而避免了复杂的空间积分。

6.1 虚拟源的概念简介

虚拟源实际上一种等效源的概念,利用光反射或绕射定律,将发射源沿着障碍物表面

进行镜像处理，即产生虚拟源。虚拟源的引入能够大大简化计算分析的复杂度，每一次反射都对应一个虚拟源，对于反射源，由于其大小一定，故反射射线只可能存在于镜像源点与两个边缘连线所夹区域内，故其有效区域为圆弧区域(图 1 (a) 所示的绕线包围部分)；而对于绕射边缘，因为绕射射线存在于以边缘为轴，以入射射线与边缘夹角为顶角的绕射圆锥面上，因此其有效区域也为圆弧区域(图 1 (b) 绕线包围部分)。

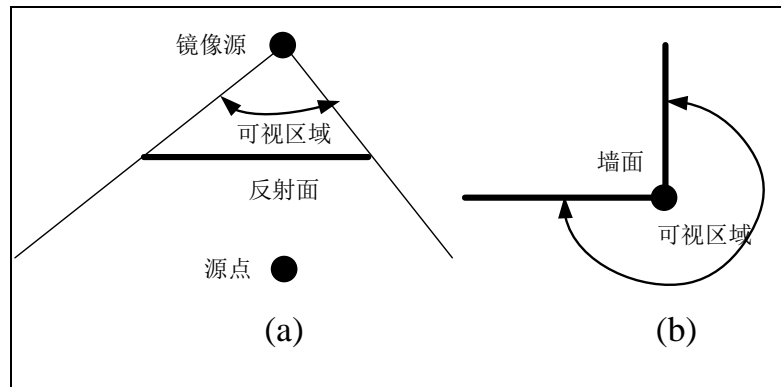


图 1 虚拟源的可视范围示意图

基于上述分析，反射源与绕射源都可以看成是虚拟源，所不同的是在处理过程中，将绕射源的可视区域进行单独处理。

6.2 基于递归回溯和反向联合检验的路径追踪算法

6.2.1 源点辐射离散化求解路径的缺陷

求解电磁波的传输路径问题，一种直观的方式就是从发射源出发，按照一定的搜索方式搜索到达场点的路径。通过将源点的辐射进行离散化，可以找到不同角度下的传播情况。由于辐射源的连续辐射，任意方式的角度量化都会造成辐射角度的缺失，从而带来计算的误差。特别是当量化精度比较低时，存在的误解可能性会进一步加大。

6.2.2 递归回溯算法

源点辐射离散化的求解方式存在着准确率低、效率不高的缺陷，必须加以改进。借助虚拟源的概念，可以找到一条可能存在的传输路径，可以直接排除掉多个不可能的辐射角度，降低了求解的复杂度，为此提出基于虚拟源的递归回溯算法，算法的中心思想见图 2。

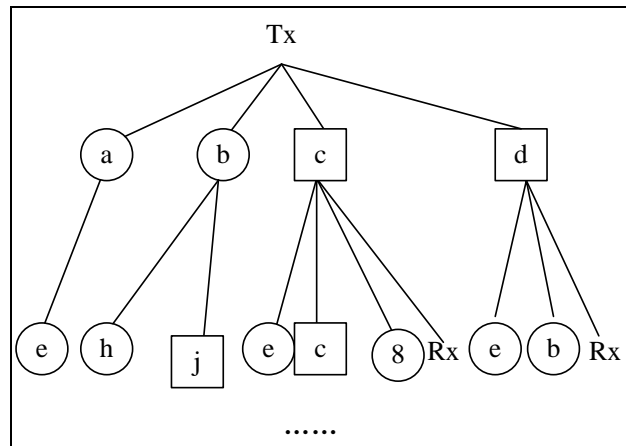


图 2 根据递归方式寻找虚拟源示意图

递归回溯思想：从发射源出发，如图 2 所示，向四周可见障碍物面进行一级镜像，确定一级虚拟源点；新产生的虚拟源点作为新的发射源进行二次镜像，依次类推，绕射虚拟源和反射虚拟源分别采用“圆圈”和“方框”表示。设定判定条件，当某一枝节路径达到反射、绕射次数约束条件时，终止该枝节虚拟源搜索。

上述过程可以找到所有可能的传播路径，为了排除其中的错误路径，需要从场点出发进行虚拟源的有效性检验，该过程为反向检验过程。

6.2.3 反向检验：虚拟源的有效性判别

从接收场点出发，虚拟源的有效与否在于它与场点是否可视。具体可视性的判别，需要区分反射源和绕射源。对于反射源，连接场点与最后一级虚拟源，若连线与该发射源对应的反射边有交点，且接收场点与交点可视，该反射源为有效反射源，以交点为新的接收场点继续进行检验，否则删掉该虚拟源枝节；若该附带节点为绕射源，且接收场点与其可见，则该绕射源为有效绕射源，其余处理同上。

算法评价：该联合算法相比于辐射源量化方式的优势在于能够有效地解决量化的盲目性问题。利用递归回溯算法确立虚拟源，一方面可以找到所有可能的镜像方式，另一方面通过利用绕射、反射约束条件，可以排除不可能成立的传输路径，因此在保证求解正确性的同时大大降低了计算的复杂度；最后，采用反向检验验证，进一步提高了算法的可靠性。

综上所述，根据上述算法，能够确定收发之间的传输路径，对于每一条确定的传输路径，都可以求解达到接收位置的场强大小，接收机处的场强大小即为若干条路径上的场强叠加，因此模型一中围绕角度积分的复杂计算问题转化为容易求解的角度累加求和。基于以上分析，建立以下模型：

6.3 模型二：基于有效辐射密度的场强累加模型

$$\begin{cases} E(\theta_i) = \rho_E(\chi; T_x, R_x; p(w, t, \varphi); \theta_i) \\ E = \sum_i \rho_E(\theta_i) \end{cases} \quad (5)$$

其中，在已知传输路径的情况下，环境因素、收发位置以及信号特征都是固定的， θ_i 为第*i*条传输路径的信号源辐射角。上述模型表明，接收机的场强大小为若干传输路径的场强叠加，即只有若干的辐射情况对接收信号产生影响。

6.4 模型求解

在上述模型求解过程中，涉及递归回溯以及反向检验两个过程，对于反向检验，前文已经给出了明确的方法，主要是几何知识的简单运用。下面主要讨论如何利用递归回溯确定虚拟源。

6.4.1 运用搜寻完全可见面法确定虚拟源

虚拟源的确定问题关键在于如何确定反射面，该问题有两种常用的方法：搜寻完全可见面法和搜寻部分可见面法，方法对比如图 3 所示：

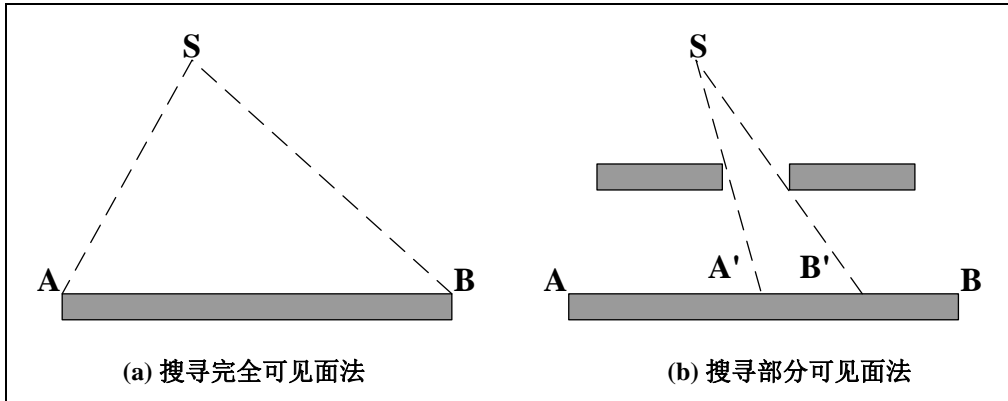


图 3 搜寻完全可见面法和搜寻部分可见面法对比示意图

如图 3 所示，点源照射在障碍物表面时，根据光线的反射定律，可将 AB 面看成镜像面，在下一级镜像时，以 AB 为可见范围进行搜索，上述方式为搜寻完全可见面法；由于其他障碍物存在，光线可达范围缩小为 A'B'，在下一级进行镜像时，以 A'B'为可见范围进行搜索，上述方式为搜寻部分可见面法。

根据以上分析可以发现：搜寻部分可见面法在下一级的镜像搜索时具有更高的精度，但在判别可见面时需要借助复杂的判定条件；而搜寻完全可见面法则是将包含可达点的障碍物表面都记为可见面。本文在虚拟源树的建立过程中就是利用后一种算法，利用该算法可以得到包含所有虚拟源的镜像面，同时利用逆推方式能够剔除不合理的虚拟源。

6.4.2 传输路径确定

确定求解算法后，下面就是重复的搜索过程，具体流程如图 4 所示：

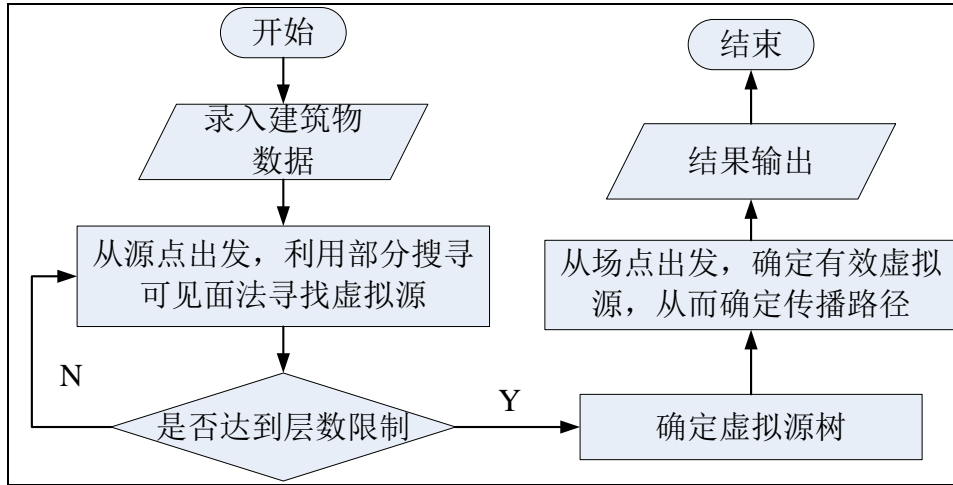


图 4 路径搜索流程图

6.5 传输路径计算结果及分析

确定了搜索算法之后，可以确定任意两点间的传播路径，对于问题一中要求 25 种发射机-接收机组合，只需改变收发位置的坐标值可完成求解过程，结果在下文分别给出。

(1) 确定发射机 Tx (500, 200)和接收机 Rx (250, 350)间的主要传播路径

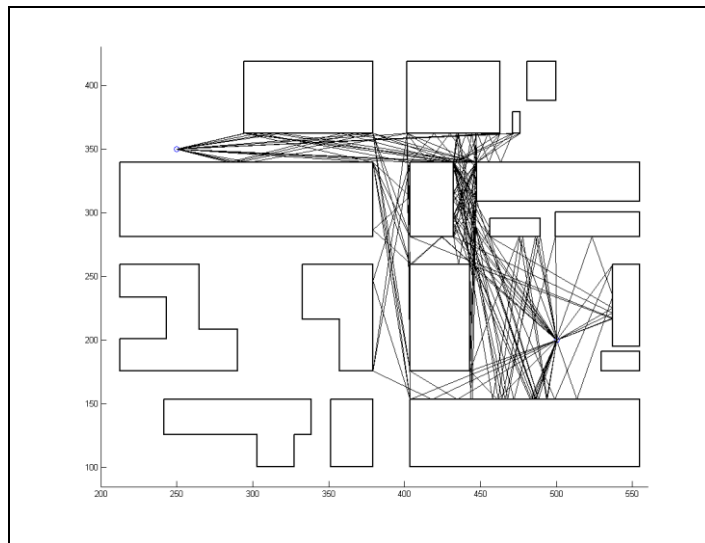


图 5 传输路径结果图

图 5 为收发位置之间所有传播路径的可视化结果，具体坐标信息详见附件 1（第一问传播路径坐标.xls）。本文基于递归回溯和反向联合检验的路径追踪算法，采用点到点的传输方式，计算出共有 97 条从源点到场点的传输路径。

(2) 25 种发射机-接收机组合的传播路径分析

按照相同的方法，对于 25 种收发组合，改变收发位置便可以得到每一种具体情况的传播路径，统计每一种组合的路径条数，记录在表 1 中。

表 1 不同收发位置对应的路径数

接收位置 发射位置	(450,300)	(450,275)	(450,250)	(450,225)	(450,200)
--------------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

(300, 350)	134	173	114	104	80
(350, 350)	122	169	102	99	81
(400, 350)	272	483	324	334	320
(450, 350)	345	451	383	384	367
(500, 350)	120	153	98	90	69

表中最上面一行和最左边一列单元格分别对应不同的收发位置，每一组收发组合对应于一个路径数。观察上表可以发现，当发射、接收位置分别为（500，350）、（450，200）时传输路径的条数最少，共 69 条；当发射、接收位置分别为（400，350）、（450，275）时传输路径的条数最多，共 483 条。

结果分析：当发射、接收位置分别为（400，350）、（450，275），其实收发位置均位于交通路口等枢纽位置，收、发位置具有很好的可见性，因此传输路径条数最多。相反，当发射、接收位置分别为（500，350）、（450，200），情况正好相反，因此传输路径条数最少。

（3）基于多种组合传播情况的规律提取

为了挖掘路径传播的规律，需要进一步从上述多种组合情况中提取有用信息。下面就针对不同组合情况中的同一信息要素进行对比，试图探寻其中的规律。

a. [绕射+反射]组合分布情况

表 2 不同的反射、绕射情况占总传输路径的比例

发射位置	接收位置	只有反射	只一次绕射	只两次绕射	一次绕射一次反射	一次绕射两次反射	一次绕射三次反射	一次绕射四次反射	两次绕射一次反射
(300,350)	(450,300)	0	0.007463	0.097015	0.022388	0.067164	0.134328	0.164179	0.507463
	(450,275)	0.00578	0.00578	0.132948	0.023121	0.052023	0.098266	0.115607	0.566474
	(450,250)	0	0.008772	0.114035	0.026316	0.061404	0.087719	0.105263	0.596491
	(450,225)	0	0.009615	0.115385	0.019231	0.048077	0.067308	0.115385	0.625
	(450,200)	0	0	0.0625	0.0125	0.0375	0.075	0.1125	0.7
(350,350)	(450,300)	0.02459	0.008197	0.106557	0.02459	0.04918	0.139344	0.147541	0.5
	(450,275)	0.011834	0.005917	0.136095	0.023669	0.047337	0.100592	0.136095	0.538462
	(450,250)	0	0.009804	0.127451	0.029412	0.04902	0.078431	0.107843	0.598039
	(450,225)	0	0.010101	0.121212	0.020202	0.040404	0.050505	0.161616	0.59596
	(450,200)	0.012346	0	0.061728	0.012346	0.037037	0.061728	0.148148	0.666667
(400,350)	(450,300)	0.029412	0.003676	0.080882	0.014706	0.058824	0.128676	0.227941	0.455882
	(450,275)	0.018634	0.010352	0.175983	0.020704	0.035197	0.082816	0.142857	0.513458
	(450,250)	0.024691	0.003086	0.111111	0.012346	0.037037	0.089506	0.16358	0.558642
	(450,225)	0.002994	0.002994	0.10479	0.017964	0.035928	0.086826	0.167665	0.580838
	(450,200)	0.003125	0	0.0875	0.015625	0.034375	0.08125	0.1625	0.615625
(450,350)	(450,300)	0.023188	0.005797	0.049275	0.026087	0.089855	0.173913	0.292754	0.33913
	(450,275)	0.026608	0.004435	0.08204	0.02439	0.068736	0.144124	0.252772	0.396896
	(450,250)	0.02611	0.005222	0.05483	0.023499	0.067885	0.16188	0.29765	0.362924
	(450,225)	0.041667	0.002604	0.052083	0.020833	0.067708	0.164063	0.309896	0.341146

	(450,200)	0.029973	0	0.035422	0.019074	0.070845	0.177112	0.33515	0.332425
(500,350)	(450,300)	0	0.008333	0.108333	0.016667	0.066667	0.116667	0.175	0.508333
	(450,275)	0	0.006536	0.150327	0.019608	0.039216	0.084967	0.117647	0.581699
	(450,250)	0	0.010204	0.132653	0.020408	0.05102	0.061224	0.102041	0.622449
	(450,225)	0	0.011111	0.133333	0.011111	0.044444	0.044444	0.1	0.655556
	(450,200)	0	0	0.072464	0.014493	0.028986	0.057971	0.086957	0.73913

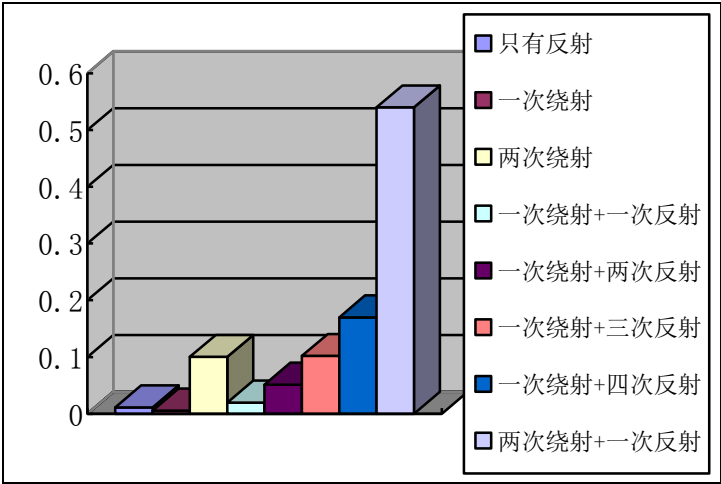


图 6 平均意义下的传播方式直方分布图

规律总结：表中给出了各种绕射-反射组合所占的比例，通过该比例大小可以直观的发现，表格中颜色加深的组合传输情况占有很大的比重，其他组合情况出现的几率比较小。该规律启发我们：在计算精度要求不是很严格的场合，为了提高求解的效率，可以更进一步增加约束条件，预先将这些几率较小的组合方式排除掉，从而可以有效地降低搜索空间。

b. 收发位置处一次可达绕射点、可见边个数与辐射路径条数的关系

表 3 不同位置对应的可见边、一次可绕射点数

发射位置	(300,350)	(350,350)	(400,350)	(450,350)	(500,350)
接收位置	(450,300)	(450,300)	(450,300)	(450,300)	(450,300)
可达边数	17	17	27	20	21
可达点数	22	22	34	23	27
总路径	134	122	272	345	120
发射位置	(300,350)	(350,350)	(400,350)	(450,350)	(500,350)
接收位置	(450,275)	(450,275)	(450,275)	(450,275)	(450,275)
可达边数	29	29	39	32	33
可达点数	35	35	47	36	40
总路径	173	169	483	451	153
发射位置	(300,350)	(350,350)	(400,350)	(450,350)	(500,350)
接收位置	(450,250)	(450,250)	(450,250)	(450,250)	(450,250)

可达边数	21	21	31	24	25
可达点数	26	26	38	27	31
总路径	114	102	324	383	98
发射位置	(300,350)	(350,350)	(400,350)	(450,350)	(500,350)
接收位置	(450,225)	(450,225)	(450,225)	(450,225)	(450,225)
可达边数	20	20	30	23	24
可达点数	26	26	38	27	31
总路径	104	99	334	384	90
发射位置	(300,350)	(350,350)	(400,350)	(450,350)	(500,350)
接收位置	(450,200)	(450,200)	(450,200)	(450,200)	(450,200)
可达边数	18	18	28	21	22
可达点数	27	27	39	28	32
总路径	80	81	320	367	69

规律总结：对于同一个接收位置，当发射位置改变后，发射点的可达边、一次可达绕射源的数目较多时，此时收发之间可达的总路径数也明显多于其他情况。可以归纳，可达边、一次可达绕射源数目较多时对应于城市中的交通枢纽的位置。基于以上分析，为了确保通信的可靠性，在基站的选址问题上，一方面要考虑基站的有效覆盖问题，另一方面也要考虑多径传播带来的信号衰落。

c. 收发位置建筑的遮挡系数与传输路径条数的关系

遮挡系数定义：源点发射的信号在建筑物之间的可穿越面积与包围源点的所有面积的比值定义为遮挡系数。计算源点向四周均匀传播时遇到第一个障碍点的距离均值，该值的归一化结果就是遮挡系数。遮挡系数越大，表明发射机的可视性越好。

表 4 不同发射位置的遮挡系数与传播路径关系表

发射位置	(300,350)	(350,350)	(400,350)	(450,350)	(500,350)
遮挡系数	0.582920079	0.473027724	1	0.544416756	0.849497458

规律总结：对于表中的 (400,350)，处于城区中的路口位置，可视性最好，对照表 1 可以发现，其可达路径也较多。因此，可视性好的发射位置具有更多的传输路径。

6.6 接收机处的场强计算

角度积分转化为离散角度的求和后，接收机处的场强就可以进行计算了。上述求解已经确定了传输路径，实际接收的场强就是发射信号的场强经过反射、绕射以及空间衰减后

得到结果，即

$$E_r = \frac{E_0}{r_0} \prod_m \rho S_{rm} \prod_n D_n S_{sn} \quad (6)$$

其中， E_0 为初始场强， r_0 为源点到第一个场点的距离， ρ 为反射系数，其大小为 $\sqrt{0.8}$ ， D 为绕射系数， S_{rm} 、 S_{sn} 分别为反射扩散因子和绕射扩散因子。根据以上分析，参照题目中给出的已知计算公式，分别计算不同路径下的接收场强大小。

对于多径传输信号，接收的场强大小应为：

$$\begin{aligned} |E| &= \left| \sum_{i=1}^Q E_i e^{j(\omega t + k r_i)} \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^Q [E_i \cos(\omega t + \varphi_i) + j E_i \sin(\omega t + \varphi_i)] \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^Q [E_i (\cos \omega t \cos \varphi_i - \sin \omega t \sin \varphi_i) + j E_i (\sin \omega t \cos \varphi_i + \cos \omega t \sin \varphi_i)] \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^Q [E_i (C_i \cos \omega t - S_i \sin \omega t) + j E_i (C_i \sin \omega t + S_i \cos \omega t)] \right| \quad (\text{令 } C_i = \cos \varphi_i, S_i = \sin \varphi_i) \\ &= \sqrt{\left[\sum_{i=1}^Q E_i (C_i \cos \omega t - S_i \sin \omega t) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^Q E_i (C_i \sin \omega t + S_i \cos \omega t) \right]^2} \\ &= \sqrt{\sum_{p=1}^Q \sum_{l=1}^Q E_l E_p (C_l \cos \omega t - S_l \sin \omega t)(C_p \cos \omega t - S_p \sin \omega t) + \sum_{m=1}^Q \sum_{n=1}^Q E_m E_n (C_m \sin \omega t + S_m \cos \omega t)(C_n \sin \omega t + S_n \cos \omega t)} \\ &= \sqrt{\sum_{p=1}^Q \sum_{l=1}^Q E_l E_p [(C_l \cos \omega t - S_l \sin \omega t)(C_p \cos \omega t - S_p \sin \omega t) + (C_l \sin \omega t + S_l \cos \omega t)(C_p \sin \omega t + S_p \cos \omega t)]} \\ &= \sqrt{\sum_{p=1}^Q \sum_{l=1}^Q E_l E_p (C_l C_p \cos^2 \omega t - S_l C_p \sin \omega t \cos \omega t - S_p C_l \sin \omega t \cos \omega t + S_p S_l \sin^2 \omega t + C_p C_l \sin^2 \omega t + S_l C_p \cos \omega t \sin \omega t + S_p C_l \sin \omega t \cos \omega t + S_p S_l \cos^2 \omega t)} \\ &= \sqrt{\sum_{p=1}^Q \sum_{l=1}^Q E_l E_p (C_l C_p + S_p S_l)} \\ &= \sqrt{\sum_{p=1}^Q \sum_{l=1}^Q E_l E_p (\cos \varphi_l \cos \varphi_p + \sin \varphi_l \sin \varphi_p)} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^Q \sum_{l=1}^Q E_l E_p \cos(\varphi_l - \varphi_p)} \\ &= \sqrt{\sum_{p=1}^Q \sum_{l=1}^Q E_l E_p \cos k(r_l - r_p)} \end{aligned} \quad (7)$$

6.7 运用场强分布探寻 25 种收发组合情形的规律

根据上述场强计算公式可以分别求得 25 种情况下接收到的场强大小，见表 5：

表 5 不同收发位置组合下的场强接收大小

发射位置 接收位置	(300, 350)	(350, 350)	400, 350)	(450, 350)	(500, 350)
(450, 300)	4.49E-08	1.03E-05	0.000115	0.001503	3.03E-08
(450, 275)	9.88E-08	5.32E-07	3.68E-05	0.001534	1.52E-06
(450, 250)	3.69E-09	1.28E-08	8.01E-06	0.000456	1.59E-10

(450, 225)	3.46E-09	5.88E-10	6.14E-07	0.000105	3.83E-09
(450, 200)	7.58E-11	1.91E-08	6.83E-08	6.68E-06	3.89E-11

规律总结：从上表数据可以观察到，当发射位置为（450, 350），接收位置为（450, 300）、（450, 275）时，场强值非常大。根据反射、绕射公式可以发现，经过一次绕射后的场强损耗远大于反射损耗。当收发位置的坐标点为上述情况时，存在着一次反射直达的情形，因此得到的场强值非常大。在设计收发位置时，为了得到较强的接收信号，需要让信号传输经历尽可能少的绕射次数，最好直接通过反射完成。

6.8 发射角的量化精度讨论

本文建立了基于空间角度积分的场强求解模型，见式（1）。该模型给出了一般求解思路。但在实际操作过程中，由于空间积分的复杂性，通过该模型很难找到问题的数值解。一种常规的思路就是将连续的空间积分进行离散化，即把公式（1）表示的模型一转化为公式（3）表示的模型二。模型二中，场强的大小为有效辐射密度的角度累加值，为了求解模型二，需要将发射角进行角度量化。

考虑实际的物理环境，天线以一定的面积接收电磁波，天线接收到的信号可以看成电磁波束。角度量化的理想目标是使所有量化区间内的电磁波能以几乎相同的传输方式到达接收位置。理论上讲，充分细化的量化区间可以实现上述目标，但随之产生的是运算复杂度呈指数级增长。因此需要对量化精度与运算复杂度进行折衷处理。

6.8.1 基于等效照射角的角度量化模型

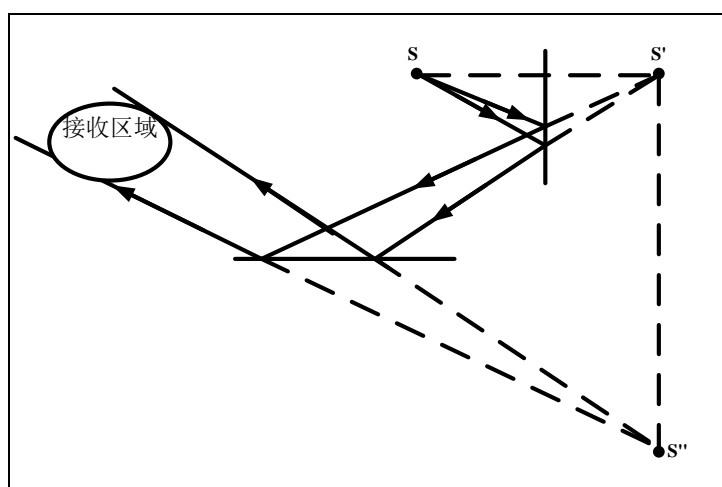


图 7 经过若干次反射后的波束覆盖示意图

由于在实际物理环境中，接收天线不可能是一个点而应该是一个区域。对于二维的情况，从源点 S 点发射的一束电磁波经过若干次反射后，照射到接收区域的情形相当于从虚拟源点 S'' 点发射的一束电磁波照射直接照射到接收区域上。根据反射定律，该虚拟波束具有与实际波束相同的角宽度，且随着传播距离的增加，波束将不断扩散，该过程的示意如图 7 所示。当接收区域大小固定时，由于照射方向的不同，每条可以照射到接收区域上波束的角宽度不同，如图 8 所示。

根据以上分析，在不考虑绕射的情况下（绕射相当于新的源点在 270° 度角的范围上非均匀自由辐射），量化精度的选择将严重依赖于接收区域的大小和传播过程中经历的传播路径长度。当量化足够精细时，无论接收区域是否规则，都可以保证每条波束几乎全部功率都能被接收区域接收到，然而这将势必造成运算复杂度的增加。反之，对于某一固定的接收区域，若其不够规则或量化区间过大时，势必造成某些可照射接收区域的波束，其实际功率不能完全被接收区域接收，从而引入运算误差。为方便分析，在二维情况下我们不妨假设接收区域为规则的圆形区域，且对于特定的物理环境和收发信机坐标，可照射到该区域上的波束最小角宽度为 ψ_{\min} 。那么当量化区间宽度 $\Delta\theta > \psi_{\min}$ 时，将不可避免地导致某些离散化以后的波束到达接收区域后，其可照射面积大于实际的接收面积，从而使得部分功率不能被接收区域接收到。而由于采用射线表征可照射波束，认为每条可达射线的全部功率均被接收端完全接收到，这势必会引入计算误差。因此，我们在角度量化中所选择的精度至少要满足 $\Delta\theta < \psi_{\min}$ 。

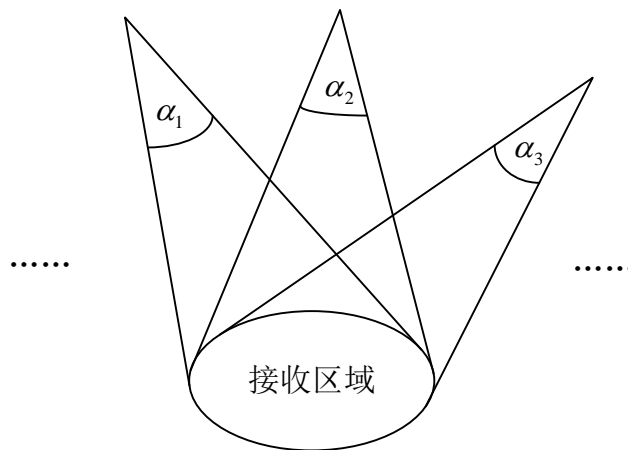


图 8 不同路径到达接受区域对应的最佳角度量化

6.8.2 基于出射路径最少邻域的角度量化模型

源点到场点的信号传输可以简化点到点的传输，利用基于递归回溯和反向联合检验的路径追踪算法，可以找到从源点到场点的所有可达路径，而且每一条传输路径都具有不同

的传输特性。所谓传输特性，这里是指信号的传播历程（反射面和反射位置以及绕射点和绕射方向）、相位时延以及路径损耗等。那么，对于每一条传输路径对应的辐射角度，必定存在一个邻域，使得该邻域内出射的电磁波都能够以与该路径几乎相同的传输方式到达接收区域，且对接收区域的场强具有几乎相同的贡献，即其有效辐射密度 ρ_E 相同。

射线追踪的基本思想是用一条射线来表征具有相同传输特性的邻域上的电磁波，并认为该射线携带了该邻域内所辐射的所有能量。

若假设，当量化精度达到某一程度 $\Delta\theta$ 后，能够保证量化区间内的电磁波具备几乎相同的传输特性，即在该量化精度条件下有效辐射密度为常数。对于某个量化区间 $[\theta_i, \theta_i + \Delta\theta]$ 其有效辐射密度定义为 ρ_i 。此时若将量化精度提高一倍，即量化精度达到 $\Delta\theta/2$ 时，则上述量化区间 $[\theta_i, \theta_i + \Delta\theta]$ ，被分割为两个区间分别是 $[\theta_i, \theta_i + \Delta\theta/2]$ 和 $[\theta_i + \Delta\theta/2, \theta_i + \Delta\theta]$ ，且每个量化区间上的有效辐射密度分别为常数 ρ_i^1 和 ρ_i^2 ，可以认为 $\rho_i = (\rho_i^1 + \rho_i^2)/2$ 。

对于前一种量化情形，量化区间 $[\theta_i, \theta_i + \Delta\theta]$ 对接收区域的场强贡献为：

$$E_1 = \rho_E \Delta\theta \quad (8)$$

当把量化精度提高一倍后，量化区间 $[\theta_i, \theta_i + \Delta\theta/2]$ 和 $[\theta_i + \Delta\theta/2, \theta_i + \Delta\theta]$ 对接收区域的场强总的贡献为：

$$E_2 = \rho_i^1 \frac{\Delta\theta}{2} + \rho_i^2 \frac{\Delta\theta}{2} = \rho_i \Delta\theta \quad (9)$$

由此可以得出，即便量化精度提高一倍，对接收区域场强计算的精度几乎没有影响，却付出了巨大的运算复杂度代价，过高的量化精度并没有太大的实际价值。因此，在保证足够精度的前提下，我们更倾向于减少量化区间的数量。

另一方面，随着量化区间的数量的减小，量化区间的宽度会逐渐增加。若假设任意两条可达路径的出射方向最小夹角定义为 ψ_{\min} ，那么当量化区间宽度 $\Delta\theta > \psi_{\min}$ 时将不可避免地导致某些量化区间上同时存在两条以上可达路径的情况。然而，由于不同可达路径具有不同的传输特性，在这种量化精度条件下，两种不同传输特性的情况会被当成同一种传输情况来处理，也必将引起不可忽略的运算误差。因此，若想保证运算精度，必须满足同一量化区间上，至多存在一条可达路径。即在确保精度的前提下，从尽可能地降低复杂度的角度出发，可以建立如下量化精度优化模型：

$$\begin{array}{ll} \min N \\ s.t. Q_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, N \end{array}$$

其中， N 表示量化区间数量， Q_i 表示第 i 个量化区间上存在的可达路径数量。

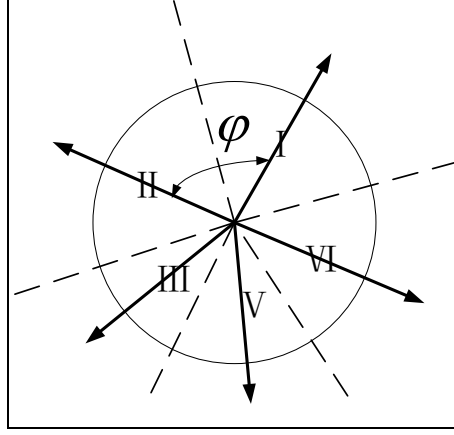


图 9 角度量化方式示意图

均匀量化条件下，满足模型的最优解为：

$$\Delta\theta = \varphi_{\min} \quad (10)$$

其中， φ_{\min} 任意两条路径之间的最小夹角。

6.9 算法评价：误差来源及稳定度分析

上述问题求解的核心思想就是联合运用递归回溯以及反向验证算法确定电磁波的传播路径，在求解过程中具体使用了完全搜索可见面法确定虚拟源。为了进一步完善该算法，提供更为精确科学的求解过程，下面对该算法的误差来源及稳定度方面进行考察。

误差

误差来源：在搜寻可见边、确定虚拟源时，对发射源的辐射进行了角度量化。但是，在具体的搜寻过程中，由于采用的是搜寻完全可见边法（即直线上的一点以上可见则该直线可见），能够有效地避免角度量化带来的搜索盲区问题。不可否认的是，在特殊的地形地貌情况下，这种方式还是会带来一定的误差。改进的思路，一方面可以从提高量化精度上考虑，另一方面要从根本上抛弃搜寻思想、建立与所有可见障碍物的虚拟源树。

稳定度分析：考虑到天线的实际工作机制，信号的接收不是理想的点对点的传播，而是点到面的传播。运用正向射线追踪搜寻传播路径的情况，由于对发射源进行角度量化，在实际信号处理中，就是将接收点源扩大成接收面。但这种处理方式反过来也带来了结果的稳定度较差。例如，当接收点源位置进行微调时，相应的接收面也跟着移动，那么接收到的

信号会发生很大的变化。本文提出的算法是一种基于点到点的路径搜索方式，在接收位置发生微调后，接收到的信号基本不发生变化，具有很高的稳定度。为了验证以上分析，对问题（1）中接收位置进行了微调，微调大小以工作波长为步长，计算结果如下：

表 6 接收坐标微调后对应的路径数

微调后的坐标位置(单位：米)	接收的路径数
(250,349.85)	97
(250,350.15)	97
(250.15,350)	97
(249.85,350)	97

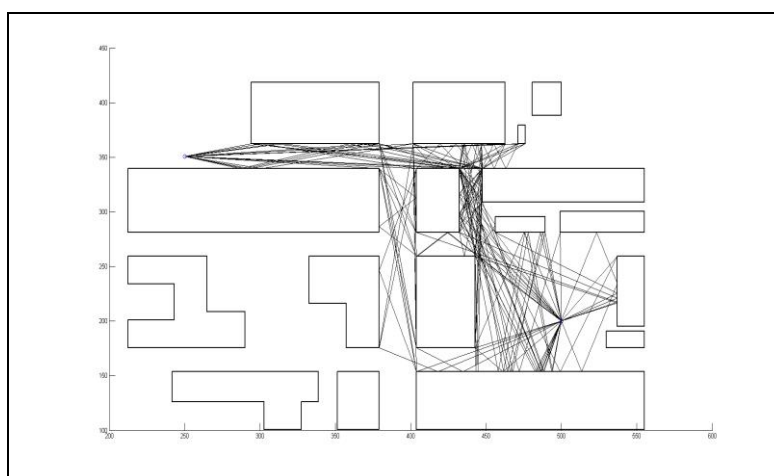


图 10 接收坐标微调后对应的路径分布图

图、表中的结果表明，接收位置进行微调后，电磁波的传播路径保持了很好的一致性。这一结果从事实上说明了本文提出的路径搜索算法具有很好的稳定性。进一步调整微调范围，当步长取 $1m$ (6.67λ) 时，计算结果保持基本不变，即使调整步长成倍增加时，仍具有很好的稳定性。

七、 宽带问题的分析与求解

7.1 相位与振幅确定情况下多波干涉的初步分析

从发射机出发的电波经过多个传播路径（可能是多次反射传播、多次绕射传播或是发射与绕射的任意组合传播）到达接收机，这些信号在接收机处相遇叠加，形成多波干涉。多波干涉形成的接受信号可以描述为

$$f(w,t) = \sum_{i=1}^Q A_i e^{j(wt + kr_j)} \quad (11)$$

上式中, Q 为到达某接收点的传播途径总数; A_i 和 r_i 分别为到达接收点的第 i 条传播路径的信号电场强度和长度; kr_i 为长度为 r_i 的传播路径上的相位积累; $\omega = 2\pi f = 2\pi c / \lambda$ (c 为光速)。

对于收发信机传播环境确定的情况下, 该多波干涉信号的相位和振幅是确定的, 于是, 令 $\varphi_i = kr_i$ 可以求得 $f(w, t)$ 的振幅:

$$\begin{aligned}
 |f(w, t)| &= \left| \sum_{i=1}^Q A_i e^{j(\omega t + kr_i)} \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^Q [A_i \cos(\omega t + \varphi_i) + j A_i \sin(\omega t + \varphi_i)] \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^Q [A_i (C_i \cos \omega t - S_i \sin \omega t) + j A_i (C_i \sin \omega t + S_i \cos \omega t)] \right| \\
 &= \sqrt{\left[\sum_{i=1}^Q A_i (C_i \cos \omega t - S_i \sin \omega t) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^Q A_i (C_i \sin \omega t + S_i \cos \omega t) \right]^2} \\
 &= \sqrt{\sum_{k=1}^Q \sum_{l=1}^Q A_l A_k (C_l C_k \cos^2 \omega t - S_l C_k \sin \omega t \cos \omega t - S_k C_l \sin \omega t \cos \omega t + S_k S_l \sin^2 \omega t} \\
 &\quad + C_k C_l \sin^2 \omega t + S_l C_k \cos \omega t \sin \omega t + S_k C_l \sin \omega t \cos \omega t + S_k S_l \cos^2 \omega t) \\
 &= \sqrt{\sum_{k=1}^Q \sum_{l=1}^Q A_l A_k (\cos \varphi_l \cos \varphi_k + \sin \varphi_l \sin \varphi_k)} \\
 &= \sqrt{\sum_{k=1}^Q \sum_{l=1}^Q A_l A_k \cos(\varphi_l - \varphi_k)} \tag{12}
 \end{aligned}$$

可以看出多波干涉信号的振幅与每条路径信号的电场强度 A_i 和两两之间的路径相位积累差有关。路径相位积累差反映了路径信号之间的相关性, 下面我们来定量的分析不同经过不同路径的信号相关性。从信号源出发经过两条不同路径到达接收端的信号 $x_i(t)$ 和 $x_j(t)$ 可以表示为

$$\begin{cases} x_j(t) = A_i [\cos(w_0 t + \varphi_i) + j \sin(w_0 t + \varphi_i)] \\ x_j(t) = A_j [\cos(w_0 t + \varphi_j) + j \sin(w_0 t + \varphi_j)] \end{cases} \tag{13}$$

其中, $\varphi_i = kr_i$ 和 $\varphi_j = kr_j$ 表示路径传播带来的相位积累。根据时间相关系数的计算公式:

$$\rho_{i,j,\tau} = \frac{E\{[x_i(t) - E\{x_i(t)\}][x_j(t+\tau) - E\{x_j(t+\tau)\}]\}}{\sqrt{E\{[x_i(t) - E\{x_i(t)\}]^2\} E\{[x_j(t+\tau) - E\{x_j(t+\tau)\}]^2\}}} \tag{14}$$

可以得到:

$$\rho_{i,j,\tau} = \cos(-\omega_0 \tau + \varphi_i - \varphi_j) + j \sin(-\omega_0 \tau + \varphi_i - \varphi_j) \tag{15}$$

我们得到，两条不同路径的时间相关性与传播途径长度差 $r_i - r_j$ 和时延 τ 有关。图 11 表示发射机与接收机间所有路径两两间时间相关系数实部随到达距离差的变化曲线，不能看出明显的规律性。

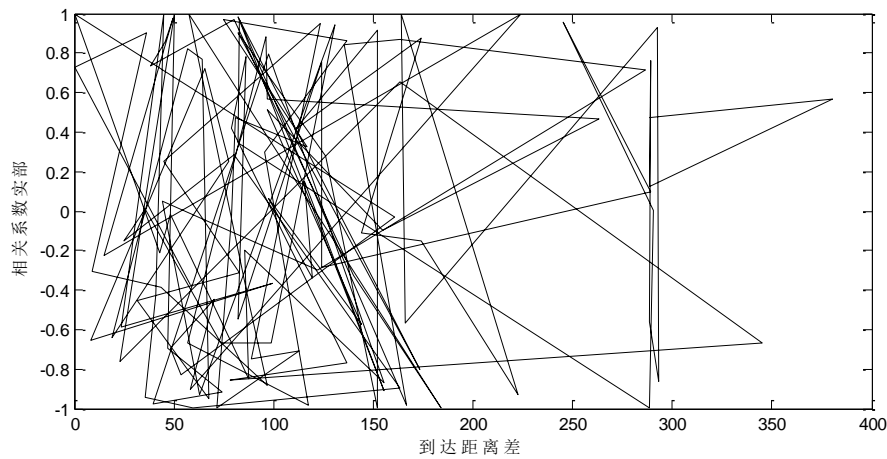


图 11 到达距离差与相关系数实部的关系曲线图

为此，我们定义 r_i/λ 为第 i 条路径的到达相位延迟，时间相关系数实部和虚部曲线随到达相位延迟变化曲线如图 12 和 13 所示。从图中可以看出，随着到达相位延迟的增加，时间相关系数实部呈现出余弦规律性，虚部呈现出正弦规律性，与理论分析相一致。同理，可以得到相关系数的虚部随到达相位延迟变化曲线。

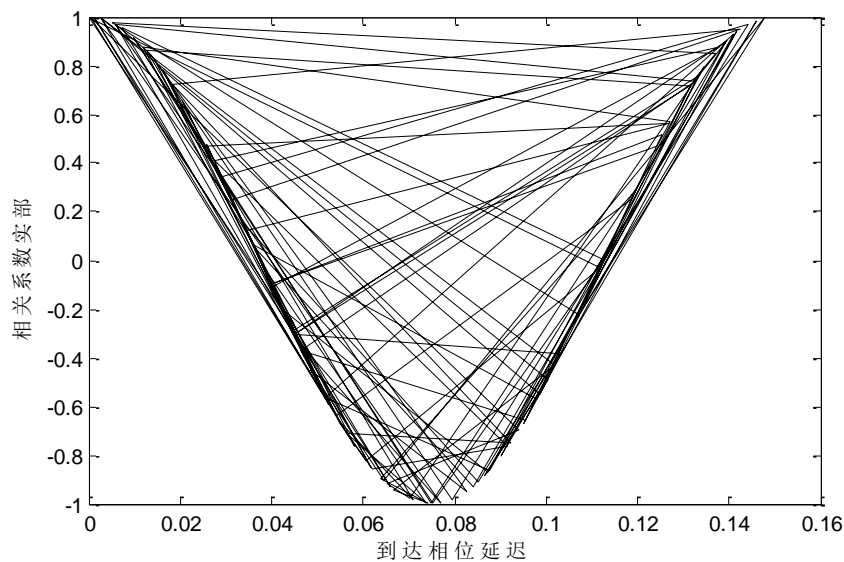


图 12 到达相位时延与相关系数实部的关系曲线图

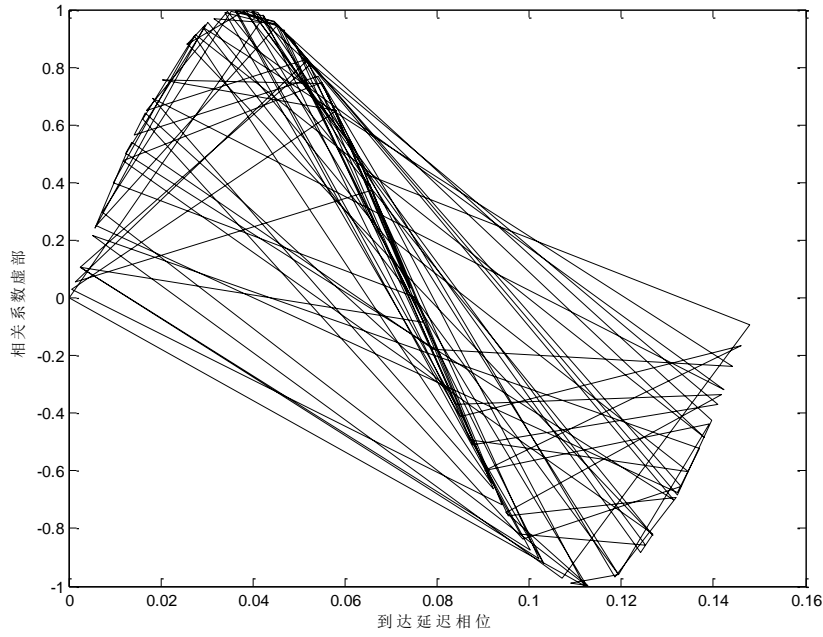


图 13 相关系数虚部关于到达相位延迟的变化趋势

7.2 相位随机扰动对单频多波干涉的影响分析

在通信实际中，无线信号从发射机出发经过多个传播路径到达接收机，其振幅和相位具有一定的随机性。与振幅相比较，微小相位的随机扰动导致多波干涉后的合成信号幅度急剧变化，是影响合成信号的主要因素。因此，我们将初始相位看成是服从均匀分布于 $[0, 2\pi]$ 的随机变量。

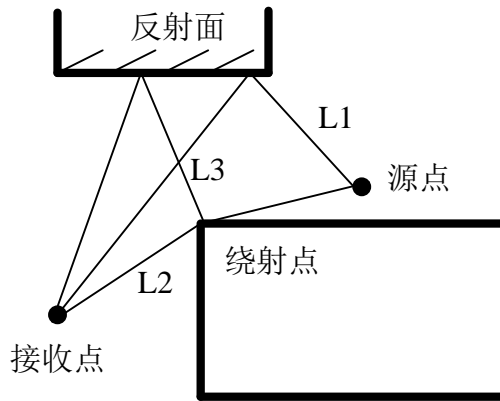


图 14 初始辐射方向图

信号源辐射时，引入随机相位后，我们做以下假设：

- 1、具有不同初始辐射方向的信号(如图 14 中 L1 和 L3)的初始相位 $\eta_{0,i}$ ($i=1,2,\dots,Q$) 为相互独立的随机变量，服从 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布；
- 2、具有相同初始辐射方向的辐射路径 l_i 和 l_j (如图 14 中 L2 和 L3) 具有相同的随机初始相位 $\eta_{0,i} = \eta_{0,j}$ 。

引入相位随机扰动后，多波干涉信号可以表示为

$$\begin{aligned} f(w, t) &= \sum_{i=1}^Q A_i e^{j(\omega t + kr_i + \eta_{0,i})} \\ &= \sum_{i=1}^Q A_i \cos(\omega t + kr_i + \eta_{0,i}) + j \sum_{i=1}^Q A_i \sin(\omega t + kr_i + \eta_{0,i}) \end{aligned} \quad (16)$$

从信号源经过两条不同路径到达接收端的信号 $x_i(t)$ 和 $x_j(t)$ 可以表示为

$$\begin{cases} x_i(t) = A_i [\cos(\omega_0 t + kr_i + \eta_{0,i}) + j \sin(\omega_0 t + kr_i + \eta_{0,i})] \\ x_j(t) = A_j [\cos(\omega_0 t + kr_j + \eta_{0,j}) + j \sin(\omega_0 t + kr_j + \eta_{0,j})] \end{cases}$$

若 $x_i(t)$ 和 $x_j(t)$ 是具有相同初始辐射方向的两条辐射路径，我们称之为同类相似路径，则根据时间相关性的计算公式， $x_i(t)$ 和 $x_j(t)$ 时间相关系数仍可以表示为

$$\rho_{i,j,\tau} = \cos(-\omega_0 \tau + k(r_i - r_j) + \eta_{0,i} - \eta_{0,j}) + j \sin(-\omega_0 \tau + k(r_i - r_j) + \eta_{0,i} - \eta_{0,j}) \quad (17)$$

如前述假设，若 $x_i(t)$ 和 $x_j(t)$ 是具有不同初始辐射方向的两条辐射路径，分别具有一个随机相位即 $\varphi_{0,i}, \varphi_{0,j}$ ，可以得到 $\rho_{i,j,\tau} = 0$ 。

于是我们可以得到每种收发组合各自的相关矩阵。相关矩阵示意如下(取 $\tau = 0$)：

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}e^{j(kr_1 - kr_2)} & \dots & a_{1Q}e^{j(kr_1 - kr_Q)} \\ a_{21}e^{j(kr_2 - kr_1)} & 1 & a_{2j}e^{j(kr_2 - kr_j)} & \vdots \\ \vdots & a_{ji}e^{j(kr_j - kr_i)} & \ddots & \vdots \\ a_{Q1}e^{j(kr_Q - kr_1)} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

其中对角线元素为 1，表示 $\tau = 0$ 时，信号与自身完全相关。第 i 行 j 列的系数 $a_{ij} = a_{ji} = \{0, 1\}$ 。

取值如下：

- 1) 当第 i 条路径与第 j 路径具有相同初始辐射方向时， $a_{ij} = a_{ji} = 1$ ，
- 2) 当第 i 条路径与第 j 路径不具有相同初始辐射方向时， $a_{ij} = a_{ji} = 0$ 。

附件 2 中给出了 25 种收发组合发射源到接收点所有路径的相关矩阵。

跟多波干涉信号振幅的均值和二阶原点距可以表示为

$$E(|f(w, t)|) = E\left(\sqrt{\sum_{k=1}^Q \sum_{l=1}^Q E_l E_k \cos[k(r_l - r_k) + \eta_l - \eta_k]}\right) \quad (19)$$

$$E(|f(w, t)|^2) = E\left(\sum_{k=1}^Q \sum_{l=1}^Q A_l A_k \cos[k(r_l - r_k) + \eta_l - \eta_k]\right) \quad (20)$$

从上式看出，要想准确获得多波干涉信号振幅均值的解析式，需要统计所有路径的相

位积累，并作 $Q \times Q$ 重积分，难以获得准确的表达式。

7.3 蒙特卡洛实现

下面我们利用蒙特卡洛仿真实现来获得 25 种收发组合的多波干涉信号的统计特性,包括均值、二阶原点距、方差和直方图。

25 种收发组合接收点的多波干涉信号幅度的均值，二阶原点距和方差如表 7、8、9 所示：

表 7 25 种收发组合多波干涉信号幅度的均值

接收点	发射点					
		(300,350)	(350,350)	(400,350)	(450,350)	(500,350)
	(450,300)	1.00E-03	9.92E-04	0.00098886	0.001000685	9.90E-04
	(450,275)	9.94E-04	9.91E-04	1.00E-03	0.000989847	9.92E-04
	(450,250)	9.94E-04	9.91E-04	9.98E-04	0.000991921	9.91E-04
	(450,225)	9.95E-04	9.94E-04	1.00E-03	0.000990528	9.94E-04
	(450,200)	9.98E-04	9.94E-04	9.94E-04	9.92E-04	9.92E-04

表 8 25 种收发组合多波干涉信号幅度的二阶原点距

接收点	发射点					
		(300,350)	(350,350)	(400,350)	(450,350)	(500,350)
	(450,300)	1.00E-03	9.93E-04	0.000989127	0.001000959	9.90E-04
	(450,275)	9.94E-04	9.92E-04	1.00E-03	0.000990115	9.93E-04
	(450,250)	9.94E-04	9.92E-04	9.99E-04	0.00099219	9.91E-04
	(450,225)	9.95E-04	9.94E-04	1.00E-03	0.000990796	9.94E-04
	(450,200)	9.98E-04	9.94E-04	9.94E-04	9.93E-04	9.92E-04

表 9 25 种收发组合多波干涉信号幅度的方差

接收点	发射点					
		(300,350)	(350,350)	(400,350)	(450,350)	(500,350)
	(450,300)	2.73E-07	2.69E-07	2.67E-07	2.74E-07	2.68E-07
	(450,275)	2.70E-07	2.69E-07	2.74E-07	2.68E-07	2.69E-07
	(450,250)	2.70E-07	2.69E-07	2.72E-07	2.69E-07	2.68E-07
	(450,225)	2.70E-07	2.70E-07	2.73E-07	2.68E-07	2.70E-07
	(450,200)	2.72E-07	2.70E-07	2.70E-07	2.69E-07	2.69E-07

通过仿真表明，多波信号振幅的概率密度直方图绝大部分近似于瑞利分布（图中红线包络），如图 15 和 17 所示（发射源（350,350）到接收点（450,275），发射源（350,350）到接收点（450,225）的信号幅度概率密度的直方图），从对应的场强分布图 16 和 18 可以看出，这些通信链路具有多个强度相近的路径。

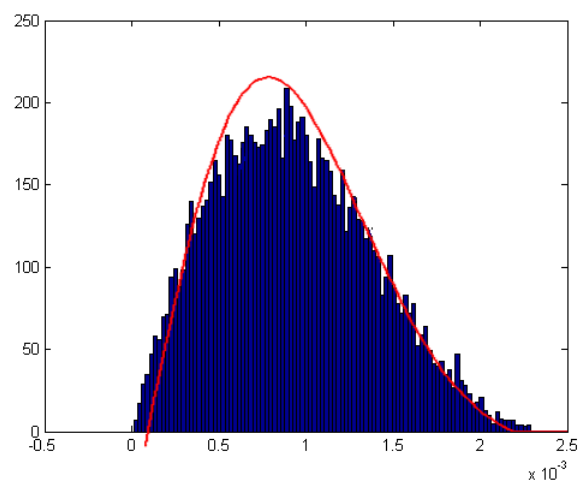


图 15 发射源（350,350）与接收点（450,275）多波干涉信号幅度概率密度的直方图

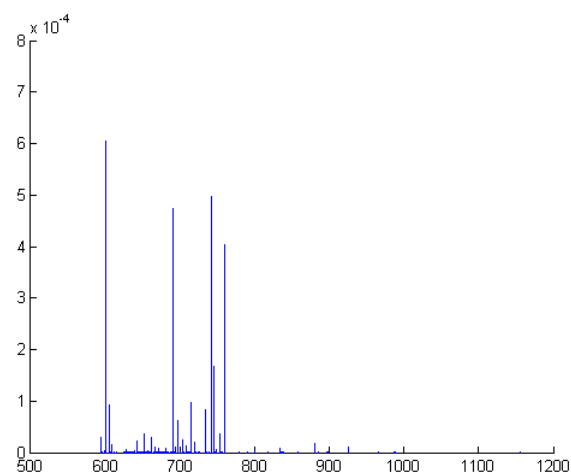


图 16 发射源（350,350）与接收点（450,275）多波干涉信号路径场强分布图

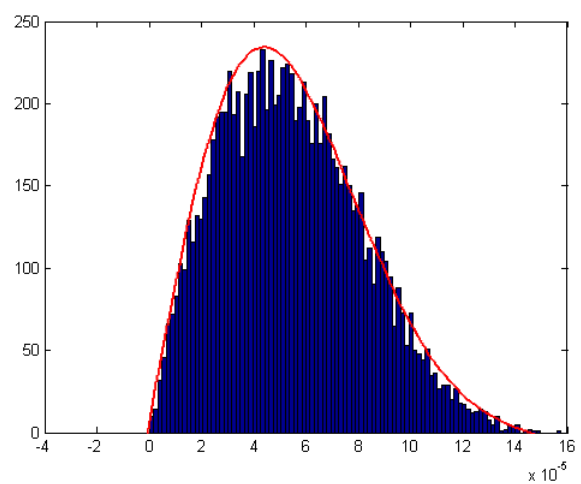


图 17 发射源（350,350）与接收点（450,225）多波干涉信号幅度概率密度的直方图

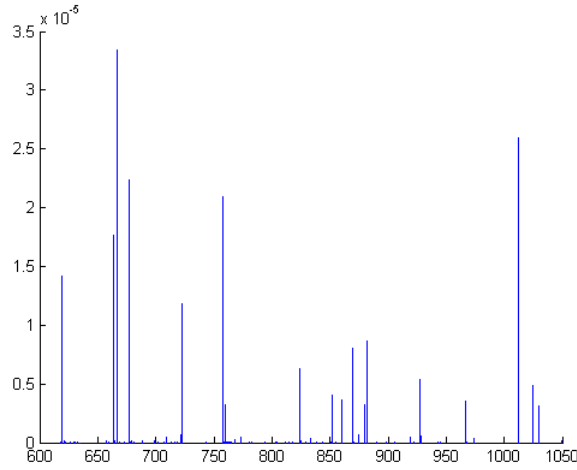


图 18 发射源（350,350）与接收点（450,225）多波干涉信号路径场强分布图

7.4 概率密度函数分析

首先，我们用瑞利衰落的概率分布函数，运用最小均方误差拟合算法，可以得到瑞利衰落的参数估计值相对应的可置信区间。

$$f(z) = \frac{z}{\delta^2} \exp\left(-\frac{z^2}{2\delta^2}\right), \quad z \geq 0 \quad (21)$$

其中， δ 为分布参数。这样就能够得到多波干涉信号振幅的概率密度分布函数。25 种收发位置组合的多波干涉信号的振幅均服从瑞利分布，表（10）和表（11）分别给出了它们各自的参数值和可置信度为 95% 置信区间。

表 10 多波干涉信号振幅的概率密度分布参数

瑞利分布 参数	发射点					
		(300,350)	(350,350)	400,350)	450,350)	(500,350)
接 收 点	(450,300)	7.98E-04	7.92E-04	0.000788996	0.000798431	7.90E-04
	(450,275)	7.93E-04	7.91E-04	8.00E-04	0.000789784	7.92E-04
	(450,250)	7.93E-04	7.91E-04	7.97E-04	0.000791438	7.90E-04
	(450,225)	7.94E-04	7.93E-04	7.98E-04	0.000790327	7.93E-04
	(450,200)	7.96E-04	7.93E-04	7.93E-04	7.92E-04	7.91E-04

表 11 多波干涉信号振幅的置信度为 95% 置信区间

	发射点					
		(300,350)	(350,350)	400,350)	450,350)	(500,350)
接收点	(450,300)	[7.73e-04; 8.23e-04]	[7.67e-04; 8.17e-04]	[7.65e-04; 8.14e-04]	[7.74e-04; 8.23e-04]	[7.66e-04; 8.15e-04]
	(450,275)	[7.69e-04; 8.18e-04]	[7.67e-04; 8.16e-04]	[7.75e-04; 8.25e-04]	[7.66e-04; 8.15e-04]	[7.67e-04; 8.17e-04]
	(450,250)	[7.69e-04; 8.18e-04]	[7.67e-04; 8.16e-04]	[7.72e-04; 8.22e-04]	[7.67e-04; 8.16e-04]	[7.66e-04; 8.15e-04]
	(450,225)	[7.69e-04; 8.18e-04]	[7.69e-04; 8.18e-04]	[7.74e-04; 8.23e-04]	[7.66e-04; 8.15e-04]	[7.69e-04; 8.18e-04]
	(450,200)	[7.72e-04; 8.21e-04]	[7.68e-04; 8.18e-04]	[7.69e-04; 8.18e-04]	[7.67e-04; 8.17e-04]	[7.67e-04; 8.16e-04]

多波干涉信号可以展开为

$$f(w, t) = \sum_{i=1}^Q A_i \cos(\omega t + kr_i + \eta_{0,i}) + j \sum_{i=1}^Q A_i \cos(\omega t + kr_i + \eta_{0,i}) \quad (22)$$

我们先对对信号的实部研究，

$$\text{Re}[f(w, t)] = \sum_{i=1}^Q A_i \cos(\omega t + kr_i + \eta_{0,i}) = R \cos \omega t - M \sin \omega t$$

其中， $R = \sum_{i=1}^Q A_i \cos(kr_i + \eta_{0,i})$ ， $M = \sum_{i=1}^Q A_i \sin(kr_i + \eta_{0,i})$ 。则 R 和 M 都是由大量随机变量之和构成的 2 个独立变量，由中心极限定理可知，当振幅 A_i 满足不存在极大奇异值的条件时，即存在某个随机变量幅值比其他幅值大的多，可将 R 和 M 近似为正态分布， $\text{Re}[f(w, t)]$ 是 R 和 M 的线性组合，可知 $\text{Re}[f(w, t)]$ 也服从正态分布。同理，可以知道 $\text{Im}[f(w, t)]$ 同样服从正态分布。于是满足奇异值条件的多波干涉信号的振幅是服从瑞利分布的。

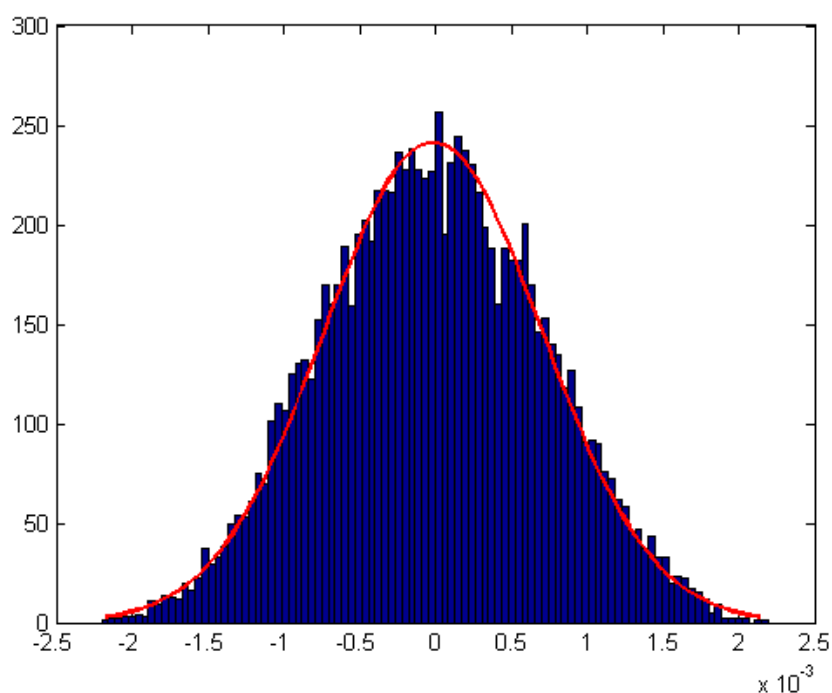


图 19 多波干涉信号实部服从近似正态分布

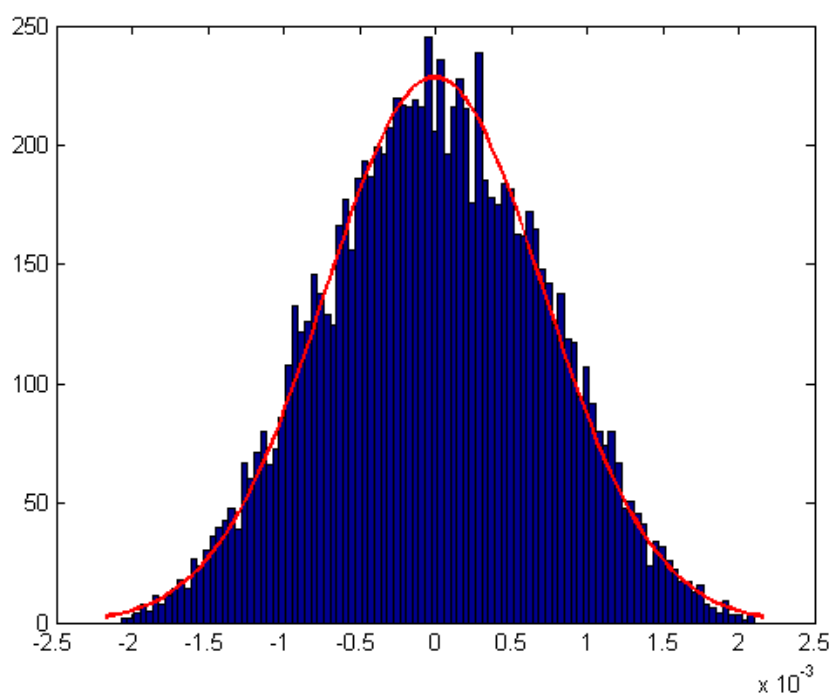


图 20 多波干涉信号虚部服从近似正态分布

另外，图 21 和 22 给出了发射源坐标（500,350）和接收点坐标（450,275）多波干涉信号振幅概率密度的直方图和其对应的路径场强分布图。由场强分布图 22 看出，该多波干涉信号振幅不满足极大奇异值的条件。我们通过路径搜索，发现该极大奇异值是由于路径只经过一次绕射到达接收点造成的，如图 21 所示。我们拟用混合高斯合成的方法，来进行概率分布分析和参数估计。但由于时间有限，对于这类问题没有进行深入研究。

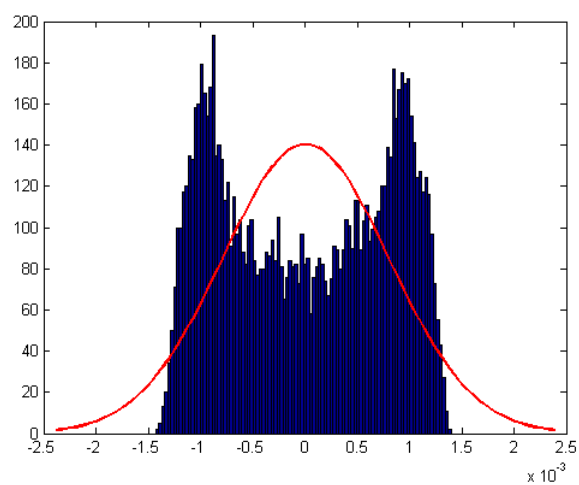


图 21 发射源（500,350）与接收点（450,275）多波干涉信号幅度概率密度的直方图

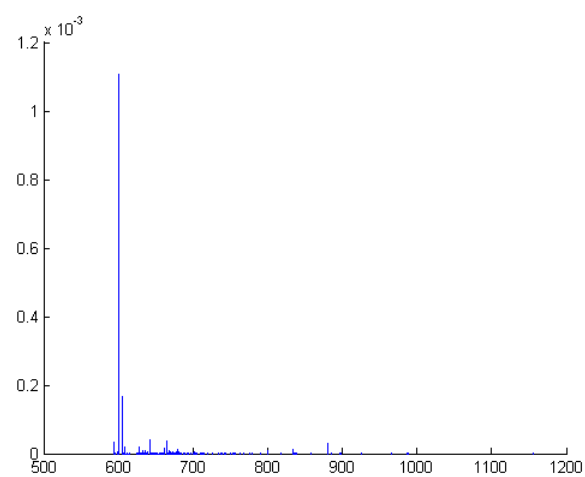


图 22 发射源（500,350）与接收点（450,275）多波干涉信号路径场强分布图

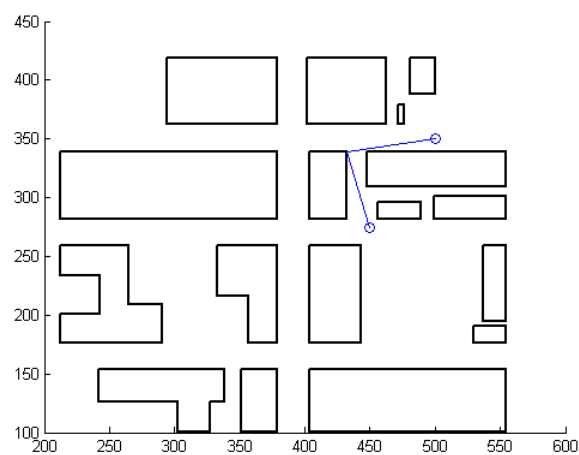


图 23 绕射路径图

八、 基于传播主径的近似信道建模

对于多波合成后的信号定义为

$$f(\omega, t) = \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^Q A_{ij} e^{j(\omega_i t + \varphi_{ij})} \quad (23)$$

显然该信号是多频合成的复信号，且对于给定的 ω_i ，有

$$\sum_{j=1}^Q A_{ij} e^{j(\omega_i t + \varphi_{ij})} = e^{j\omega_i t} \sqrt{\sum_{k=1}^Q \sum_{l=1}^Q A_{il} A_{ik} \cos[\varphi_{il} - \varphi_{ik}]} \quad (24)$$

因此

$$f(\omega, t) = \sum_{i=1}^{N_f} e^{j\omega_i t} \sqrt{\sum_{k=1}^Q \sum_{l=1}^Q A_{il} A_{ik} \cos[\varphi_{il} - \varphi_{ik}]} \quad (25)$$

该复信号的瞬时振幅表达式可以

$$\begin{aligned} |f(\omega, t)| &= \left| \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^Q A_{ij} e^{j(\omega_i t + \varphi_{ij})} \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^Q [A_{ij} \cos(\omega_i t + \varphi_{ij}) + j A_{ij} \sin(\omega_i t + \varphi_{ij})] \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^Q [A_{ij} (\cos \omega_i t \cos \varphi_{ij} - \sin \omega_i t \sin \varphi_{ij}) + j A_{ij} (\sin \omega_i t \cos \varphi_{ij} + \cos \omega_i t \sin \varphi_{ij})] \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^Q [A_{ij} (C_{ij} \cos \omega_i t - S_{ij} \sin \omega_i t) + j A_{ij} (C_{ij} \sin \omega_i t + S_{ij} \cos \omega_i t)] \right| \quad (\text{令 } C_{ii} = \cos \varphi_{ij}, S_{ij} = \sin \varphi_{ij}) \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^Q \sum_{k=1}^{N_f} \sum_{l=1}^Q [A_{ij} A_{kl} (C_{ij} \cos \omega_i t - S_{ij} \sin \omega_i t)(C_{kl} \cos \omega_k t - S_{kl} \sin \omega_k t) \\ &\quad + A_{ij} A_{kl} (C_{ij} \sin \omega_i t + S_{ij} \cos \omega_i t)(C_{kl} \sin \omega_k t + S_{kl} \cos \omega_k t)]} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^Q \sum_{k=1}^{N_f} \sum_{l=1}^Q [C_{ij} C_{kl} \cos(\omega_i - \omega_k)t + C_{ij} C_{kl} \sin(\omega_i - \omega_k)t + S_{ij} C_{kl} \sin(\omega_k - \omega_i)t + S_{ij} S_{kl} \cos(\omega_k - \omega_i)t]} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^Q \sum_{k=1}^{N_f} \sum_{l=1}^Q \cos[(\omega_i - \omega_k)t + (\varphi_{ij} - \varphi_{kl})]} \quad (\text{将 } C_{ii} = \cos \varphi_{ij}, S_{ij} = \sin \varphi_{ij} \text{ 带入}) \end{aligned}$$

则

$$f(\omega, t) = |f(\omega, t)| \exp(g(t)) \quad (26)$$

显然合成信号的振幅是时变的，且最大的变化频率取决于最大的频率差 $\Delta\omega_{\max}$ ，

在我们的应用环境中，合成信号本身的频率在 2000MHz 的水平，显然远高于

$\Delta\omega_{\max}=100\text{MHz}$ 。所以我们认为 $|f(\omega,t)|$ 就是合成信号的包络。

8.1 基于相关分类的传播主径确定

通过对数据的观察，我们发现大多数路径的场强很小，只有少部分路径的场强很大，因此一种合理的猜测是**接收机接收到的大部分能量由小部分大场强路径决定**。我们把这些对接收场强贡献较大的路径称为主径。在工程实践中，利用主径信号对接收信号近似处理具有很好的指导意义。在本节的研究中，我们对主径信号进行分析和建模。

根据上一节我们对信号初始随机相位的建模，具有相同初始辐射方向的路径具有相同的随机初始相位，属于同类路径。而初始辐射方向不同的路径具有独立的随机初始相位，不属于同类路径。在一组发射源与接收点的路径相关矩阵中，同一类路径两两之间的相关系数不为 0，而非同一类路径两两之间的相关系数为 0。在建模中，我们设定相关系数阈值 ε 来寻找特性相近的路径，并将这些相近的多路信号按类分别合成一个虚拟的主径，该主径的幅度和相位通过取多路相近路径的幅度均值和相位均值来获得。通过主径的提取，可以建立如下的信道近似函数：

$$h(t) = \sum_{i=1}^N a_i \delta(t - \tau_i) \quad (27)$$

其中 a_i 是第 i 条主径的幅度， τ_i 是第 i 条主径的延迟， δ 为冲击函数。

下面以发射机 Tx 坐标为(500, 200)和接收机 Rx 坐标为(250, 350)为例，阐述建模求解的过程。通过相关性分析，并取阈值为 0.7，可得到该收发信机之间的近似信道函数参数为：
 $a = [0.5895 \quad 0.8373 \quad 0.1321 \quad 0.1663 \quad 0.1731 \quad 0.1044 \quad 0.9212 \quad 0.4145 \quad 0.4570$
 $0.3957 \quad 0.1918] \times 10^{-4}$ ， $\tau = [0.2910 \quad 0.3238 \quad 0.2495 \quad 0.2427 \quad 0.2622 \quad 0.2097$
 $0.2011 \quad 0.2307 \quad 0.2399 \quad 0.1974 \quad 0.2303] \times 10^{-6}$ 。该收发信机之间的传输主径的示意图为：

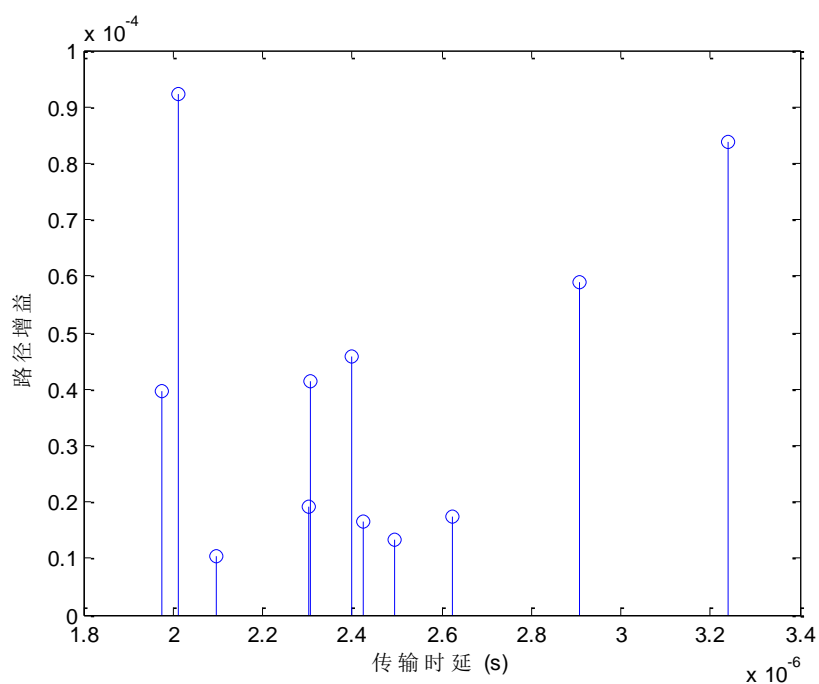


图 24 收发信机之间的传输主径（幅值相差不大）

8.2 宽带信号的统计分析

考虑宽带信号，需要研究该信道函数在不同频率处的频率响应函数，对上式进行傅里叶变换，可得

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(t) e^{j2\pi ft} dt = \sum_{i=1}^N a_i e^{j2\pi f \tau_i} \quad (28)$$

相应的幅度响应为 $|H(f)|$ 。上述信道函数的频率幅度响应函数如图 25 所示：

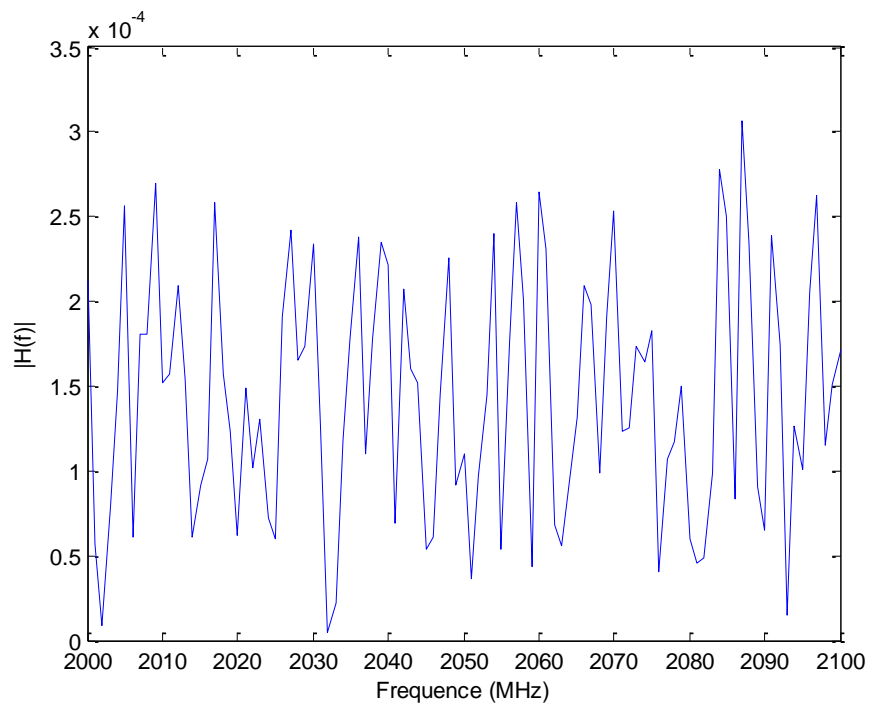


图 25 信道相应函数（主径幅值相差不大）

当路径中有只经过一次反射到达接收点时,如图 26, 此时信道的响应函数如图 27 所示。

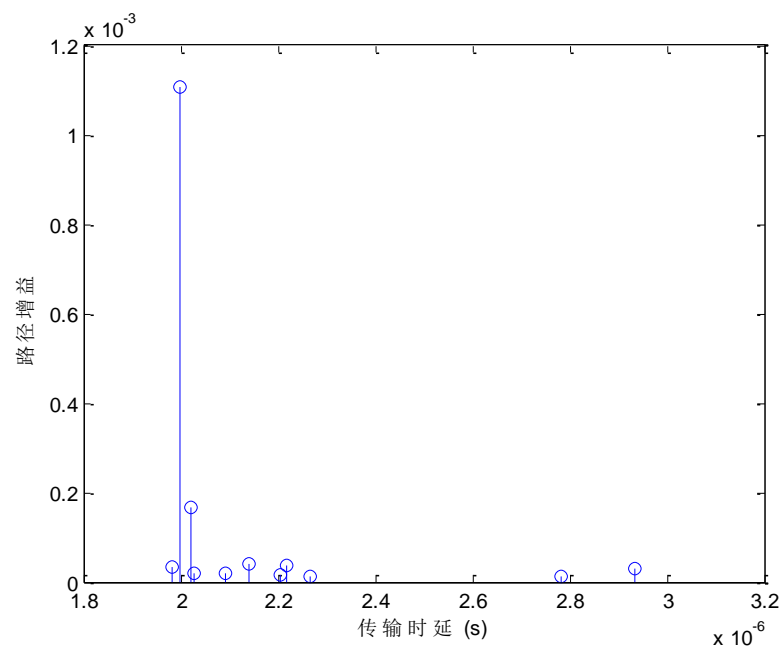


图 26 收发信机之间的传输主径（有一个较大的主径）

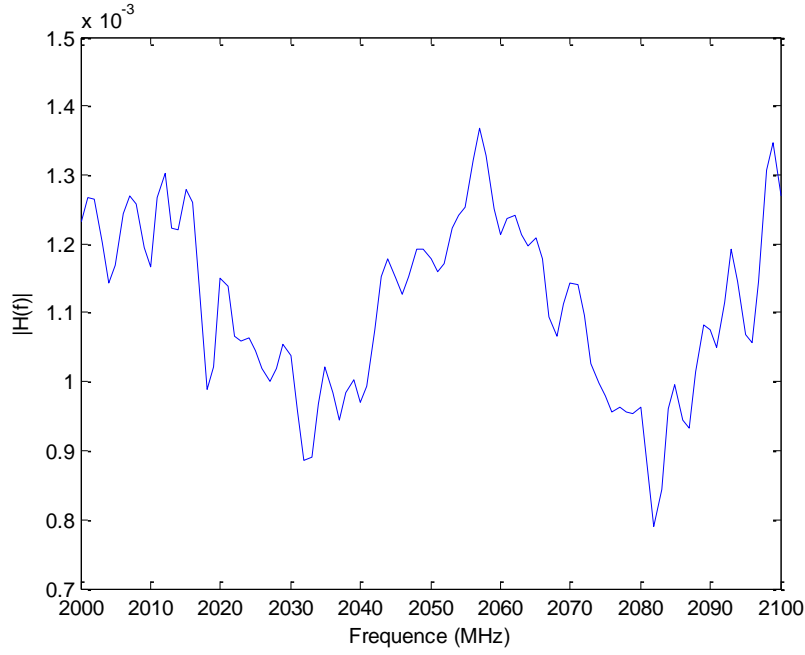


图 27 信道响应函数（有一个较大的主径）

由上图可见，该信道对不同频率的信号具有不同的响应，具体有下面两个主要特点：

1. 在不同的频率点处，接收机收到的信号强度变化起伏剧烈；
2. 在一定的带宽范围内（如），合成的多波信号具有相关性。
3. 当主径中出现一个较大的接收强度时，相关带宽变大。

同样采取依据初始辐射角对路径进行分类的方法，同一频率不同路径之间的信号相关矩阵可表达为

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}e^{j\frac{2\pi f}{c}(r_1-r_2)} & \dots & a_{1Q}e^{j\frac{2\pi f}{c}(r_1-r_Q)} \\ a_{21}e^{j\frac{2\pi f}{c}(r_2-r_1)} & 1 & a_{ij}e^{j\frac{2\pi f}{c}(r_1-r_j)} & \vdots \\ \vdots & a_{ji}e^{j\frac{2\pi f}{c}(r_j-r_1)} & \ddots & \vdots \\ a_{Q1}e^{j\frac{2\pi f}{c}(r_Q-r_1)} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

其中对角线元素为 1，表示 $\tau=0$ 时，信号与自身完全相关。第 i 行 j 列的系数 $a_{ij} = a_{ji} = \{0, 1\}$ 。取值如下：当第 i 条路径与第 j 路径具有相同初始辐射方向时， $a_{ij} = a_{ji} = 1$ ，当第 i 条路径与第 j 路径不具有相同初始辐射方向时， $a_{ij} = a_{ji} = 0$ 。

对于多个频率相近的多个单频信号，受随机相位的影响，其频谱会发生延展。那么，该信号经过近似信道 $h(t)$ 的作用后，会发生宽带信号的多波干涉现象。特别地，每个频点的信号输出值由上面 $|H(f)|$ 决定。

但是由于时间的限制，我们仅完成基于传播主径的近似传输建模，对它的许多特性不能进行深入的研究。我们相信，该模型实现了确定性和随机性的传输建模，能对工程实践起到较好的指导作用。

参考文献

- [1] 廖斌、赵昵丽、朱守正, 基于虚拟源树的射线跟踪算法的研究, 华东师范大学学报(自然科学版), 第3期: 103-108, 2008.
- [2] 顾晓龙、章文勋、云正清、金祯荣, 利用可见性概念改进基于镜像原理的射线追踪法, 电波科学学报, 第4期: 464-467, 2001.
- [3] 吴剑锋、曹伟、程勇, 用于微蜂窝电波传播预测的二维射线跟踪模型, 南京邮电学院学报(自然科学版), 21卷第2期: 46-51, 2001.
- [4] Daniela Naufel Schettino, Fernando J. S. Moreira, and Cásio G. Rego, Efficient Ray Tracing for Radio Channel Characterization of Urban Scenarios, IEEE Trans on Magnetics, vol. 43, no. 4: 1305-1308, 2007.
- [5] M. F. Catedra, J. Pkrez, F. Suezde Adana, and O. Gutierrez, Efficient Ray-Tracing Techniques for Three- Dimensional Analyses of Propagation in Mobile Communications: Application to Picocell and Microcell Scenarios, IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 40, no. 2: 15-28, 1998.
- [6] 薛定宇、陈阳泉, 高等应用数学问题的 MATLAB 求解 (第二版), 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [7] 张更新、张杭, 卫星移动通信系统, 北京: 人民邮电出版社, 2001.
- [8] [奥] Andreas F. Molisch, 宽带无线数字通信, 北京: 电子工业出版社, 2002.