

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校 南京邮电大学

参赛队号 10293014

- | | |
|------|--------|
| 队员姓名 | 1. 阮智昊 |
| | 2. 赵亚南 |
| | 3. 吴文青 |
-

参赛密码 _____

(由组委会填写)



第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 微蜂窝环境中无线接收信号的特性分析

摘 要:

针对问题一，本文基于几何光学提出了一种用于蜂窝电波传播的二维射线跟踪模型，并采用广度优先搜索设计了射线跟踪算法。为了确定发射机到接收机之间的主要路径，本文从能量和复杂度两方面确定了发射角的量化方法，并建立了判断反射有效性和判断绕射有效性的检测模型。根据模型求解结果可知：在不同的量化精度下，收发机间的主要路径数目并不相同；在本文的量化精度下，收发机间的主要路径有 35 条，具体的传播路径可视化在正文图 5.1.10 中。

针对问题二，依据本文设计的射线跟踪算法，分别跟踪 25 组收发机组合下的主要路径数目并对其进行分析，可以得出传播路径最多的组合是坐标为 (400, 350) 的发射机和坐标为 (450, 275) 的接收机；传播路径最少的组合有两组：坐标为 (350, 350) 的发射机和坐标为 (450, 200) 的接收机，以及坐标为 (500, 350) 的接收机和坐标为 (450, 200) 的接收机。

针对问题三，本文分别对问题二中 25 组收发机间的总路径数和每个限制条件下的路径数作对比，发现如下规律：位于十字路口或 T 型路口的收发机间的传播路径比较多，而位于狭长通道内的收发机间的传播路径较少；收发机间发生 7 次反射的传播路径最少而收发机间发生两次绕射一次反射的传播路径最多；在建筑物密集的场景下，绕射是射线传播的主要形式。

针对问题四，为了研究多径传输的信号，本文依据电磁波传播理论建立了初始能量分配模型；依据一致性绕射理论 (UTD)，建立了具体路径衰减模型，推导了多条路径下的信道特性，计算出了接收机端的多径传播信号模型。然后运用统计学方法和通信理论对多径传播信号进行了分析。

针对问题五，本文对宽带多频信号的输出进行采样，并且从中分离出包络和低频信号。通过对包络信号各种统计数据进行分析，讨论了包络信号的周期，幅度分布，包络均值分布，同频信号的相关性等问题

关键词：射线跟踪；UTD 理论；几何光学理论；希尔伯特变换；广度优先搜索

微蜂窝环境中无线接收信号的特性分析

一、 问题重述

目前，微蜂窝系统中比较有代表性的微蜂窝传播预测模型就是射线跟踪模型。射线跟踪是一种被广泛用于移动通信和个人通信环境(街道微蜂窝和室内微蜂窝)中的预测无线电波传播特性的技术，由于移动通信中使用的超高频微波和光同属电磁波，有一定近似性（当然还有差别），按光学方法辨认出多路径信道中收、发射机间所有主要的传播路径。一旦这些传播路径被辨认后，就可根据电波传播理论来计算每条传播路径信号的幅度、相位、延迟和极化，然后结合天线方向图和系统带宽就可得到到达接收点的所有传播路径的相干合成结果。

城市环境下的微蜂窝主要指高楼密集区，覆盖范围大大缩小(半径仅为几百米甚至几十米)，基站天线(发射机)低于周围建筑物的高度，电波是在建筑物的“峡谷”当中传播。因此，电波经过屋顶绕射后再到达地面接收点的射线路径数量非常少，而且其场强与经过建筑物多次反射和绕射的路径相比，往往可以忽略，地面的反射也不考虑。这些特点构成了微小区中电波传播的主要特点。因此，可以假设微蜂窝环境下建筑物的高度高于基站天线的高度，从而将三维问题近似地简化成二维问题，只考虑两种传播机制：反射和绕射。这种简化大大地提高了射线跟踪模型的预测效率，同时能够得到可以接受的预测精度。

对于城市微蜂窝的二维模型，建筑群可被划分为一定的“块”，建筑物(即图 1 中带有灰色阴影的多边形)则被定义为“多边形”，多边形的“边”代表建筑物的表面，多边形的“顶点”则代表了建筑物的拐角。这种简化了的市区平面图大致反映出城市的主体结构，利用它进行射线跟踪，可以得到较为准确的路径损耗。

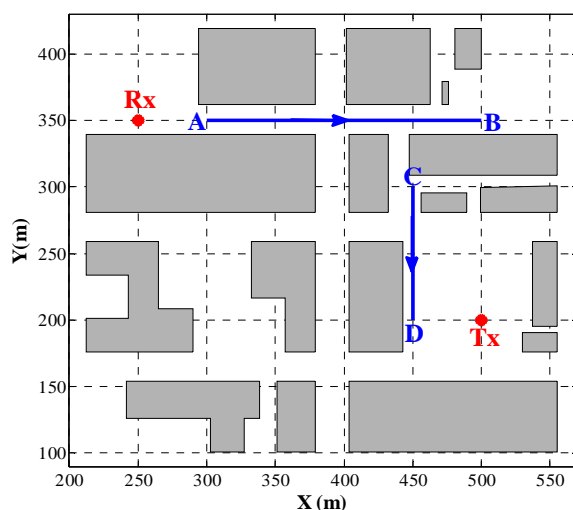


图 1 渥太华市区部分区域二维视图

在多边形的顶点上仅能产生绕射，而在多边形的边上仅能产生反射，这些多次的反射、绕射及其组合便是收、发射机间的传播路径。二维射线跟踪模型可以通过以下反射规律和绕射规律分别确定反射传播路径和绕射传播路径：

为了简化所要解决问题（与反射和绕射相关），降低计算难度，假设图 1 中所有建筑物为理想电介质，下面给出与反射和绕射相关的详细说明：

- (1) 电磁波在不同介质交接处，会发生反射。如果电磁波传播到理想电介质表面，则 80% 的能量按照反射传播规律被反射出来，其余能量进入新介质继续传播（在理想导体表面将发生能量全反射，反射波 E_r 和入射波 E_i 的强度相等）。
- (2) 绕射是指在电磁波传播路径上，当电波被尺寸较大(与波长相比)的障碍物遮挡时，电磁波改变传播方向的现象。为了解决建筑物顶点(可称为劈)上的绕射问题，需要计算绕射系数 D ，该系数体现出了绕射后绕射波强度 E_d 的衰减程度，即 $|E_d| = |E_i| \times |D|$ 。图 2 为发生在劈的绕射示意图，绕射系数的计算方法详见题目所给方法。

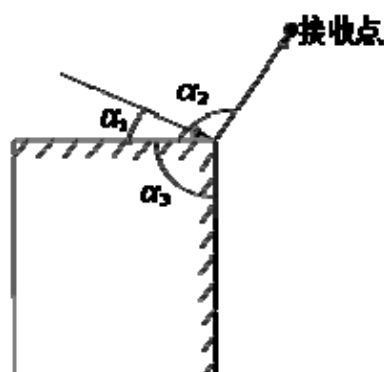


图 2 劈的绕射示意图

仅考虑下列收、发射机间传播路径：

- 只存在反射，且反射次数不超过 7 次；
- 只存在绕射，且绕射次数不超过 2 次；
- 一次绕射与一次、两次、三次或四次反射的任意组合；
- 两次绕射和一次反射的任意组合。

我们的目的是计算每条到达接收天线处的场强值，并进一步计算接收点处的总场强：

本文研究的问题主要有两类：

一、基本问题

- (1) 电波从发射天线出发，向空间各个方向均匀发射。为了能够进行数值计算，我们需要将总的发射能量均匀地分配到若干条射线上，这个过程称之为发射角量化过程。显然，规定的射线条数越多，量化就越精细，计算量也就越大。因此请根据实际情况，首先选择定量化的精细程度，然后跟踪确定发射机 Tx (坐标为(500, 200))和接收机 Rx (坐标为(250, 350))间的主要传播路径，并可视化展示在图 1 中。
- (2) 如图 1 所示，在路径 AB（两点坐标分别为(300, 350)和(500, 350)）上以 50m 为间隔取 5 个位置准备放置发射机；在路径 CD（两点分别为(450, 300)和(450, 200)）上以 25m 为间隔取 5 个位置准备放置接收机；这样有 25 种发射机-接收机组合。请问哪一个组合收发机间的传播路径最多，哪一个组合最少？
- (3) 将(2)中所有发射机-接收机组合的传播路径进行比对，请寻找尽可能多的规律。

二、宽带问题

(4) 考虑如下的多波干涉问题：对于(2)中提到的 CD 路径上的所有接收点，从发射机出发的电波都有多个传播途径(可能是多次反射传播、多次绕射传播或是反射与绕射的任意组合传播)到达这些点，这些频率相同、振动方向相同、初相位相同的简谐波（即正弦波）在各个接收点相遇叠加，出现某些接收点振动始终加强、而在另一些接收点振动始终减弱的现象，这种现象称为多波干涉现象。

请针对上述 25 种情况，对这种多波干涉的振幅 $|f(w,t)|$ 进行统计学分析，

包括：一、二阶矩特性，不同路径到达信号的相关性及概率密度分布函数；

(5) 继续考虑图 1，从发射机同时发射一组功率相同的电波，频率从 2000Mhz 到 2100Mhz，间隔近似 1Mhz，这样我们总共要同时发射 101 个单频信号。每个单频信号都会形成(4)中提到多波干涉问题，多个单频信号会形成宽带多波干涉现象，请对这种宽带多波干涉现象进行数学建模，并分析合成波的包络统计特性，如同一频率、不同路径信号之间，同一路径、不同频率信号之间的相关性等。

二、模型假设

1. 在移动通信中使用的超高频微波频率范围内，信号传播的路径和频率无关。
2. 电波经过屋顶后绕射后再到达地面接收点的射线路径可忽略，地面反射也不考虑。
3. 微蜂窝下电波的传播环境是准三维的，即假设建筑物都比基站天线高。
4. 不考虑电波的透射和散射等传播机制，只考虑反射和绕射两种传播机制。
5. 发射机天线是一个垂直极化的偶极子天线，它的水平面作用范围为全向的。
6. 所有建筑物均为理想电解质。
7. 射线在建筑物的拐角处只能发生绕射。
8. 电波传播环境下所有建筑物的墙壁表面都是光滑的，在这些表面仅能产生反射

三、符号说明及名词解释

3.1 符号说明

符号	符号说明
W	射线在传播过程中经过绕射或反射后的权值
N_d	射线在传播过程中绕射的次数
N_r	射线在传播过程中反射的次数
N_{tr}	图中所示发射机和接收机间存在的主要路径数目
N_{ij}	第 i 个发射机和第 j 个接收机间存在的主要路径数目

θ_i	反射时的入射角
θ_r	反射时的反射角
D	绕射系数
L	绕射点到场点之间的距离
\vec{E}_{LOS}	直射路径到达场点的场强
\vec{E}_0	发射电场强度
r_0	直射波的传播路径长
$F(x)$	用来修正 Keller 非一致性解的过渡函数
$f(\omega, t)$	多波干涉形成的接收信号
Q	到达某接收点的传播途径总数
A_i	到达接收点的第 i 条传播路径的信号电场强度
r_i	到达接收点的第 i 条传播路径的长度
$ f(w, t) $	多波干涉的振幅

3.2 名词解释

名词	名词解释
发射源	向空间各个方向均匀发射电波的发射天线
反射源	由墙面反射产生的反射线，这些反射线可以看做是虚拟的反射源所产生的
绕射源	由墙角绕射产生的饶射线，这些绕射线可以看做是虚拟的绕射源所产生的
缓冲半径	为了增加接收的效率，在实际预测时可将接收点设为一个小球，通过调节小球的半径来控制接收到的射线总数。小球半径即为缓冲半径

四、 问题分析

根据微小区中电波传播的主要特点，可以假设微蜂窝环境下建筑物的高度高于基站天线的高度，从而将三维问题近似地简化成二维问题，并且只考虑两种传播机制：反射和绕射。这种简化大大地提高了射线跟踪模型的预测效率，同时能够得到可以接受的预测精度。

问题一要求跟踪发射机 Tx (坐标为(500, 200))和接收机 Rx (坐标为(250, 350))间的主要传播路径，并可视化展示在图 1 中。在这里，最主要的部分是射线轨迹的跟踪。我们首先需要在发射机端进行发射角量化处理，然后遍历追踪每一条路径上中发生的反射和绕射次数，最后在所有的路径中筛选满足题目四种限制条件的所有传播路径并可视化在图 1 中。在射线传播过程中，射线可能会发

生反射或绕射，我们可以根据几何理论确定反射和绕射的有效性判断准则。最后，设计一种射线跟踪算法具体实现收发机间主要路径的跟踪。

问题二要求 25 对发射机-接收机组合下的路径数目，并确定路径最多和路径最少情况对应的两组收发机组合。在这里，可以依据问题一中设计的射线跟踪算法，分别跟踪 25 组收发机组合下的主要路径数目并对其进行分析即可得出结果。

问题三要求我们针对问题二中所获得的 25 组发射机-接收机组合下的传播路径数目，总结规律。我们可以根据收发机所处的位置、周围环境，并分别对问题二中 25 组收发机间的总路径数和每个限制条件下的路径数作对比，然后总结路径传播规律。

针对问题四，为了对多波干涉信号的振幅进行分析，本文依据电磁波传播理论建立了路径初始能量分配模型；依据一致性绕射理论（UTD），建立了具体路径衰减模型，推导了多条路径下的信道特性，计算出了接收机端的多波干涉信号。尔后运用统计学方法和通信原理理论对多波干涉信号的幅度进行了分析。

针对问题五，本文对宽带多频信号的输出进行采样，并且从中分离出包络和高频信号。通过对包络信号各种统计数据进行分析，讨论了包络信号的周期，幅度分布，包络均值分布，同频信号的相关性等问题

五、 模型分析、建立与求解

5.1 问题一模型建立与求解

5.1.1 问题一模型建立

为了跟踪确定收发机间的主要路径，我们首先需要在发射机端进行发射角量化处理，然后遍历追踪每一条射线行进路线上的反射和绕射情况，搜索所有传播路径，在遍历搜索的过程中随时丢弃不满足题目要求的传播路径，最后输出所有满足题目要求的传播路径。

基于上述流程，我们需要对电波从发射、传播到被接收的整个过程进行处理和判断。在电波发射阶段，本文需要根据工程实际给出了发射角量化处理方法。在电波传播阶段，本文可以根据几何理论判定电波在传播过程什么时候发生反射或绕射，即建立发生反射和绕射有效性判断模型。在电波被接收阶段，本文需要建立接收机接收信号模型。

最后，根据上述方法和模型，本文需要设计并实现一种射线跟踪算法来跟踪确定满足题目要求的所有传播路径。

第一问具体组织如下：

一、模型准备：确定发射源量化方法；建立墙面处是否发生反射的有效性检测模型；建立拐角处是否发生绕射的有效性检测模型；确定路径搜索过程中限制条件的处理方法；建立射线能否被接收机接收的判断模型。

二、算法设计与实现：依据上述方法和模型，设计一种射线跟踪算法，并通过使用广度优先搜索实现，跟踪确定所有满足题目要求的传播路径。

5.1.1.1 发射角量化

电波从发射天线出发，向空间各个方向均匀发射。为了能够进行数值计算，我们需要将总的发射能量均匀地分配到若干条射线上，这个过程称之为发射角量化过程。显然，规定的射线条数越多，量化就越精细，计算量也就越大。

为了确定合适的量化精度，我们首先对发射天线的特点进行分析，然后规

定每条射线的作用范围，最后根据工程实际确定量化精度。

(a)发射天线的量化特点

依据题意，可知发射机天线是全向天线，它的作用范围为整个水平面，即绕着发射天线的整个弧度范围，如图 5.1.1。

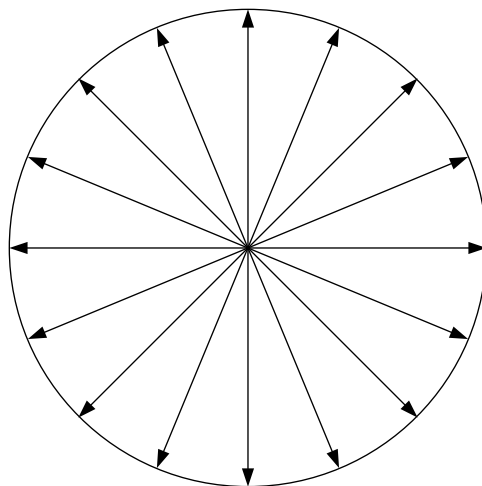


图 5.1.1 发射天线垂直方向信号辐射图

在图 5.1.1 中，圆的中心代表发射机的发射天线，各个射线方向代表的是发射角量化之后各个射线行进方向，圆的最大半径由发射天线的发射功率确定。由对发射角量化过程的理解可知，若量化过程中选择的射线数目为 N ，则每条射线上携带的能量都为发射总能量的 $1/N$ 。

当然，在实际的微蜂窝系统中，发射角量化后的射线数目要远远多于图中所示的射线数目。

(b) 根据工程实际确定量化精度

在实际选择量化的精细程度时，主要考虑以下几个因素：

(1) 可实现性

在发射角量化过程中，规定的射线条数越多，量化的就越精细，但是进行路径搜索的复杂度也越高。

假定发射角量化过程中我们规定的射线条数为 N 。在每条射线的行进过程中，若射线在建筑物表面发生反射，则射线继续在反射光线方向上继续传输；若射线在建筑物拐角处发生一次绕射，则在绕射点处发出的绕射光线的数量级也为 N 。这样，若考虑一次绕射情形，需要搜索的路径数的数量级应为 N^2 ；

依次类推，若考虑两次绕射情形，需要搜索的路径数的数量级应为 N^3 。

若 N 取值比较大，比如 $N = 7200$ ，则 $N^2 = 51840000$ ，即一次绕射情况下需要遍历的路径数已经很多了；若求得 N^3 ，则二次绕射情况下遍历所有的路径数的复杂度就更高了。

因此，从工程的可实现性来说，规定的射线条数不能过多，要不然算法实现的复杂度就越高，所需要的计算量也就越大。

(2) 能量

依据(a)中的分析,在发射机端,总的发射能量将均匀分布到若干条射线上。在微蜂窝系统中,基站主要部署在建筑物密布的市区,因此射线从发射机出发到达接收机的路径上可能发生多次反射或绕射,而每次的反射和绕射都会使得射线能量衰减。因此若规定的条数越多,量化在每条射线上的能量会越小,有可能射线在到达接收机端时能量已经非常小,而使接收机端接收到的合成信号不稳定或不能完全表征发射信号的特点。

因此,综合考虑微蜂窝系统所处的实际环境,结合处理机的处理能力,我们选择在发射天线端每隔 0.2 度确定一条射线,具体来说就是发射天线向周围平面 360 度范围内均匀发射 $360 \div 0.2 = 1800$ 条射线,其中,每条射线携带相同的能量,都为总发射能量的 $1/1800$ 。

5.1.1.2 反射有效性检测模型

在微蜂窝二维预测模型中,墙面是由多边形的边即一条线段所表示的。假设建筑物的表面只能发生反射,那么当发射机的发射天线向平面的 360 度范围均匀发射射线后,有些射线可能先入射到邻近的建筑物表面上,在此表面发生反射,出射反射光线;反射光线从入射光线与墙面的交点处射出,然后作为新的入射光线入射到邻近的建筑物表面,再在新的建筑物表面发生反射;以此行进,直至最后到达发射机或者在行进过程中依据一定的判断准则被舍弃。在简化了的二维市区平面中可能发生的反射路径如图 5.1.2 所示。

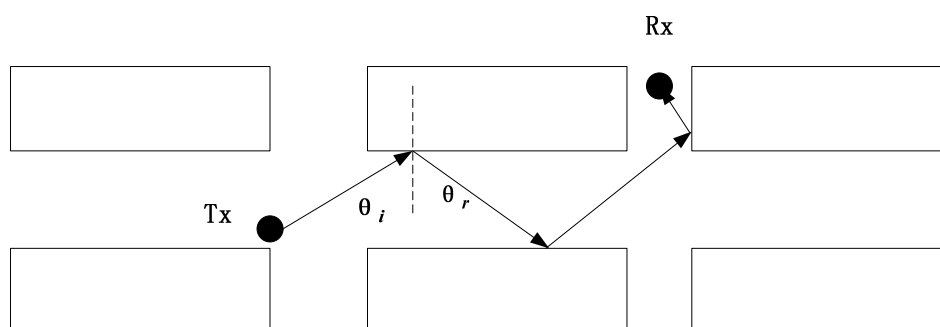


图 5.1.2 二维市区平面中可能发生的多次反射路径图

为了简化射线跟踪算法并保持算法的精确性,我们采用下面的反射有效性判断准则来判别射线是否在某一个具体的墙面发生反射。

反射有效性判断准则如下:

- (1) 射线与代表建筑物表面的线段相交;
- (2) 射线与代表建筑物表面的线段相交时没有被其它线段或点遮挡。

一个简单的判断例子如图 5.1.3 所示。

在图 5.1.3 中,射线 1 既不和墙面 1 相交,又不和墙面 2 相交,因此射线 1 必定不会在墙面 1 和墙面 2 上发生反射;射线 1 既和墙面 1 相交又和墙面 2 相交,但是在和墙面 2 相交时会受到墙面 1 的阻碍,所以射线在墙面 2 处不发生反射,而在与墙面 1 相交时,不受到任何障碍物的阻拦,因此,射线 2 在墙面 1 上发生反射。

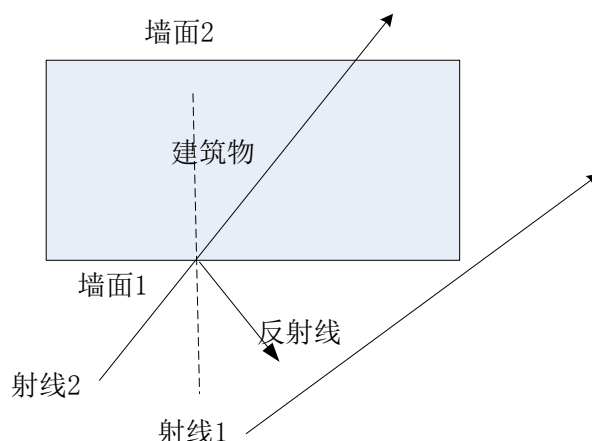


图 5.1.3 反射有效性检测模型

5.1.1.3 绕射有效性检测模型

在射线行进路径中，射线有可能在建筑物拐角处发生折射。在简化的二维城市平面模型中，以多边形的顶点代表建筑物的拐角。由于射线直接经过顶点的可能性比较小，若我们判断一条射线在建筑物拐角处发生绕射的准则为射线直接穿过多边形的顶点，那么势必会造成某些主要路径的缺失和疏漏。

为了保证射线跟踪算法的精确性，我们首先要清楚射线的作用范围。

(a)射线的作用范围

在发射机端进行发射角量化后，电波传播过程中每一条射线的射出方向是确定的，但是它本身还有一定的作用范围。举个例子来说，我们假定每隔 a 度有一条射线从发射源发出，那么每条射线的作用范围都有 a 度。具体来说如图 5.1.4 所示，即以射线为中心，邻近波动 $a/2$ 角度的范围都为每条射线的作用范围。

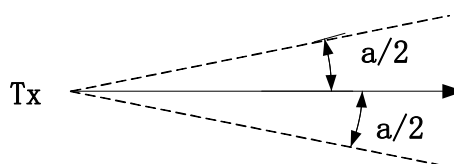


图 5.1.4 射线的作用范围

(b) 绕射有效性检测模型

为了保证射线跟踪算法在绕射问题上的精确性，我们通过判断顶点是否处于射线作用范围内判定这个顶点处是否发生绕射。一个简单的判断例子如图 5.1.5 所示。

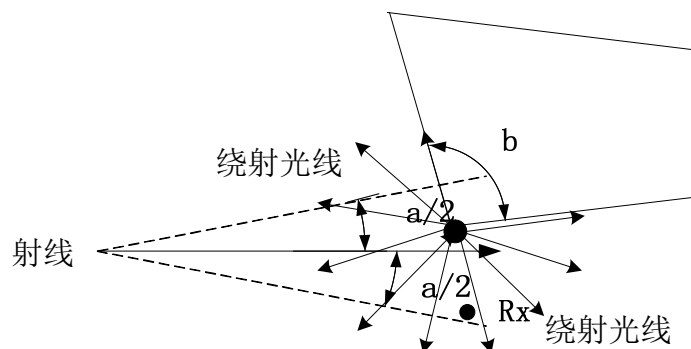


图 5.1.5 拐角处发生绕射的有效性检测模型

在图 5.1.5 中，射线并不直接穿过多边形左下角的顶点，但是它处于射线的作用范围内，因此我们仍然判定这个多边形顶点所代表的建筑物拐角在射线的作用范围内，即在这个拐角处会发生绕射，在除了建筑物内部的 b 度范围之外的 $(360-b)$ 度内均匀发射绕射光线。

在这里需要注意的是，有些顶点虽然处于射线的有效作用范围之内，但是射线的源头与顶点之间有障碍物遮挡，所以这些点必须被剔除。即处于射线有效作用范围内的顶点应为那些和射线源之间为障碍的顶点。

总结来说，绕射的有效性检测准则为：

- (1) 建筑物拐角在射线的有效作用范围内；
- (2) 射线源与拐角之间无障碍物遮挡。

5.1.1.4 对搜索射线轨迹过程中限制条件的处理

为了保证模型的收敛速度和计算复杂度，题目只要求考虑下列四种限制条件下的收、发射机间传播路径：

- (1) 只存在反射，且反射次数不超过 7 次；
- (2) 只存在绕射，且绕射次数不超过 2 次；
- (3) 一次绕射与一次、两次、三次或四次反射的任意组合；
- (4) 两次绕射和一次反射的任意组合。

如果对这四个限制条件分别考虑，即分别跟踪这四个限制条件下的射线轨迹，这无疑是非常复杂并且繁琐的过程。比如在第三个限制条件下，可以有一次绕射和一次反射的组合，可以有一次绕射和两次反射的组合，可以有一次绕射与三次反射的组合，也可以有一次绕射与四次反射的组合。同时，射线在行进过程中发生绕射与反射的顺序也可以多样化。如果将这一种种小问题考虑进去，必定会使算法变的异常低效，甚至可能会漏失某些主要路径。

我们通过分析这四个限制条件中对反射次数和绕射次数的限制，发现了一个有趣的规律：若在射线行进过程中发生的反射次数为 N_r ，发生的绕射次数为 N_d ，则一定存在如下情况：

$$1 * N_r + 3 * N_d \leq 7 \quad (1)$$

其中， N_r 和 N_d 为非负的整数。

容易看出，这些组合与上述四个条件是吻合的，并且没有疏漏的。

根据上述猜想与验证，在具体射线轨迹搜索算法实现过程中，我们可以给

射线设定一个费用变量 W 表征射线在传播过程中发生的绕射和反射的次数。比如，在初始条件下，我们设置费用 $W=0$ 。当射线在行进过程中碰到建筑物墙面发生反射后，我们将费用 W 自加 1，即 $W=W+1$ ；而当射线在行进过程中碰到建筑物拐角处发生绕射后，我们将费用 W 自加 3，即 $W=W+3$ 。

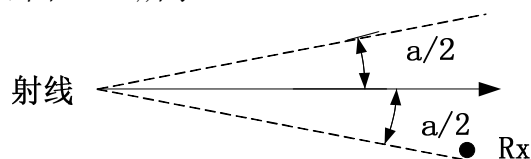
同时，在每次发生绕射或者反射并对费用 W 进行自加操作后，要判定费用 W 是否小于 7；若费用 W 少于 7，则说明这条射线还是有效的，即有可能成为满足上述四种条件限制的主要路径；反之，若费用 W 已经超过 7，则说明这条射线已经无效了，即不可能成为满足上述四种条件限制的主要路径，对此，我们随即舍弃这条射线，重新判断别的射线是否能够成为满足上述四种条件的主要路径。

在对题目的四个限制条件进行处理时，我们将这 4 个条件巧妙的用一个合适的费用变量判定准则表示，这大大降低了算法复杂度，同时保证了搜索路径的精确度。

5.1.1.5 射线能否被接收机接收的判断模型

在问题一中，给出的接收机坐标为 (250, 350)，即假定接收机为一个点，因此在实际判断中，我们采用点状有效性检测模型来判断射线能否被接收机接收。

如果把接收机作为一个点简化处理，则判断射线能否被接收机接收时只需判断接收机所处的位置是否在射线的作用范围内，判断方法类似于建筑物拐角的有效性检测方法，如图 5.1.6 所示。



5.1.6 点状有效性检测模型

在图 5.1.6 中，接收机所在的位置在射线的作用范围内，并且接收机与射线出发点之间没有被建筑物遮挡，因此，我们判定图中射线可以被接收机接收。

这里判断射线能否被接收机接收很大程度上取决于我们在初始发射角量化过程中设定的量化精度。当我们设定的量化精度越大，那么每条射线的作用范围越小，被接收机接收的概率越小；反之，设定的量化精度越小，那么每条射线的作用范围越大，被接收机接收的概率越大；但是，量化精度还要和实际情况相符合。

5.1.1.6 问题一总模型

根据上述分析，在建立了的各个判定准则的基础上，要追踪确定满足条件的收发机间的主要路径，可以按照算法 1 步骤进行。

算法 1：射线追踪算法

- Step1*: 根据 5.1.1.1 中发射角量化方法对发射角进行量化，加入路径池；
- Step2*: 判断是否遍历完所有路径。若没有，从路径池中取出一条路径；否则，转到 *Step7*；
- Step3*: 依据 5.1.1.4 的限制条件处理方法判断该路径上的费用 W 是否大于 7。若大于 7，丢弃此路径，转到 *Step2*；
- Step4*: 判断路径射线是否到达接收机。若是，将路径保存在结果池，转到 *Step2*；
- Step5*: 依据 5.1.1.2 中的反射有效性判断规则和 5.1.1.3 中的反射有效性判断规则判断路径射线是否有新的发射/折射点。若否，则丢弃此路径，转到 *Step2*；
- Step6*: 依据上述的反射和绕射有效性判断规则判断路径下一节点是绕射还是反射，根据限制条件处理方法对费用 W 进行操作，然后将反射或绕射得到的所有可能路径放回路径池，转到 *Step2*；
- Step7*: 根据结果池输出满足题目要求的所有路径，算法结束。
-

5.1.2 问题一求解

根据上述算法分析，我们设计了对应的射线跟踪算法，并采用广度搜索优先的方法进行实现。

射线跟踪算法的流程图如图 5.1.9 所示。

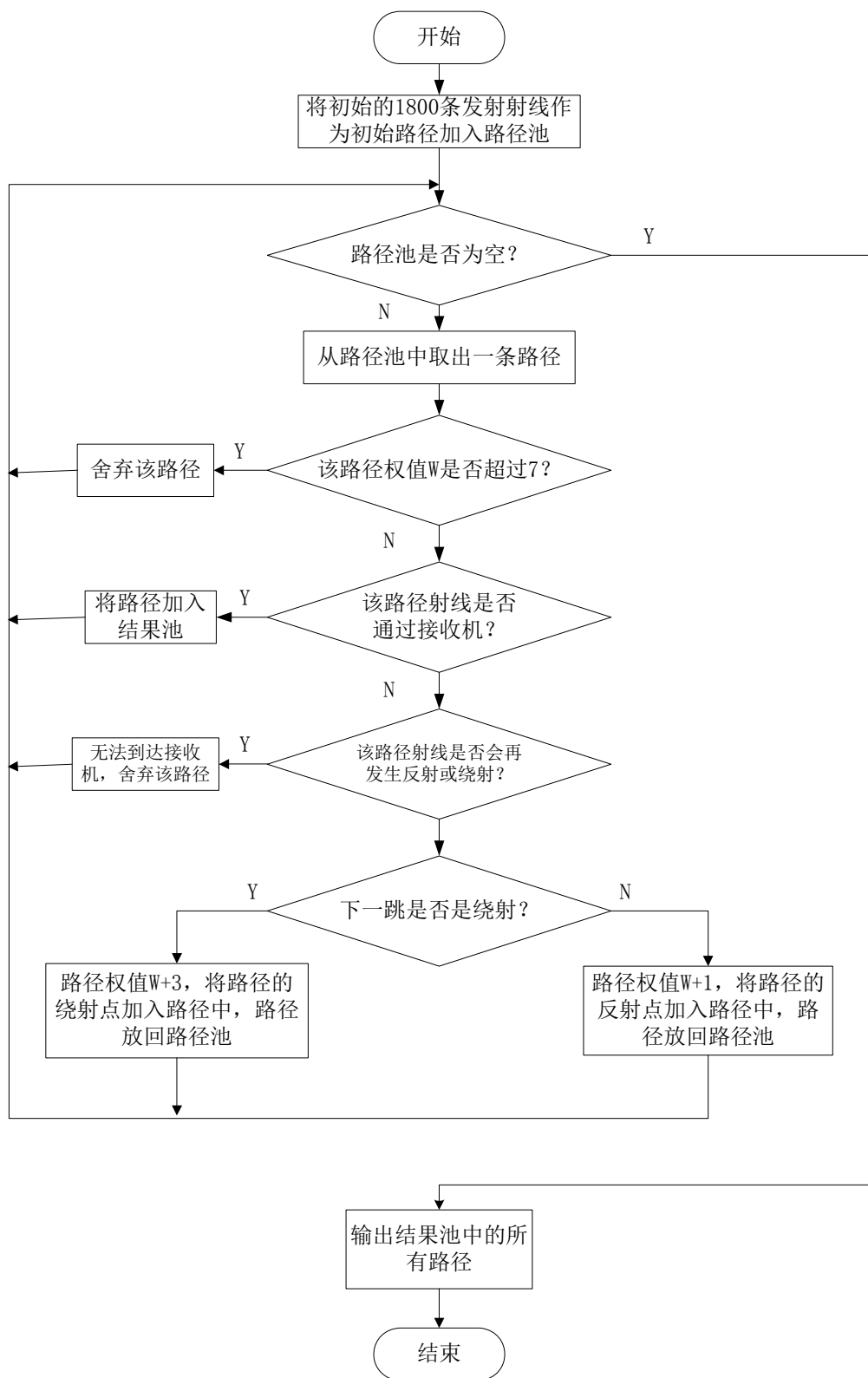


图 5.1.9 射线跟踪算法流程图

5.1.2.2 问题一结果

运行本文设计的射线跟踪算法后得在 1800 等分量化下的符合题目要求的主要传播路径共有 35 条。其中，每个限制条件下的主要传播路径数目如表 5.1.2

所示：

表 5.1.2 各个限制条件下的路径数目

	限制条件 1	限制条件 2	限制条件 3	限制条件 4	总数
传播路径数目	0	8	4	23	35

其中，限制条件 1 下的路径为只存在反射，且反射次数不超过 7 次的路径，限制条件 2 下的路径为只存在绕射，且绕射次数不超过 2 次的路径，限制条件 3 下的路径为一次绕射与一次、两次、三次或四次反射的任意组合的路径，限制条件 4 下的路径为两次绕射和一次反射的任意组合的传播路径。

分析四个限制条件下的传播路径数目，我们发现：只存在反射的情况下，收发机之间的路径数目最少；存在两次绕射和一次反射的情况下，收发机之间的路径数目最多。

满足题目要求的所有传播路径如图 5.1.10 所示：

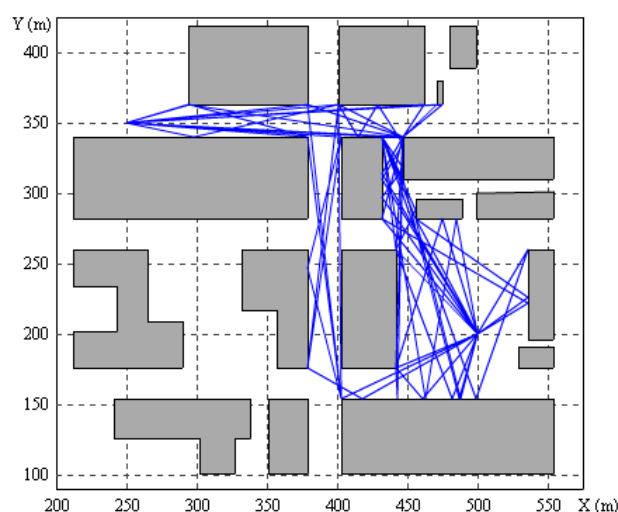


图 5.1.10 满足题目四种限制条件的所有传播路径

满足限制条件 2，即只存在绕射，且绕射次数不超过两次的所有路径如图 5.1.11 所示。

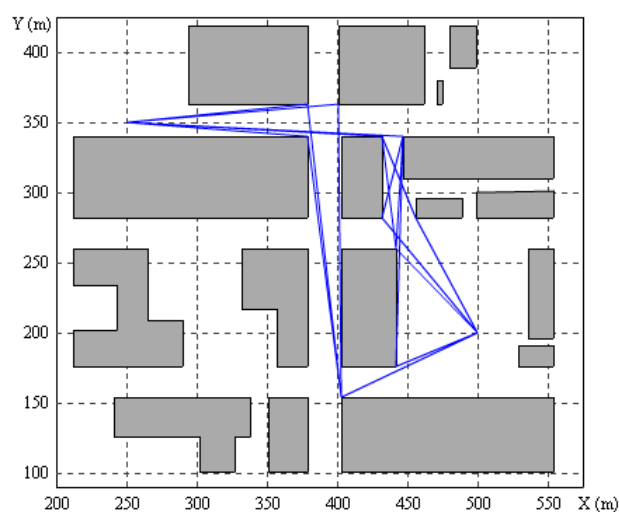


图 5.1.11 满足限制条件 2 的所有传播路径

满足限制条件 3，即一次绕射与一次、两次、三次或四次反射的任意组合的所有路径如图 5.1.12 所示。

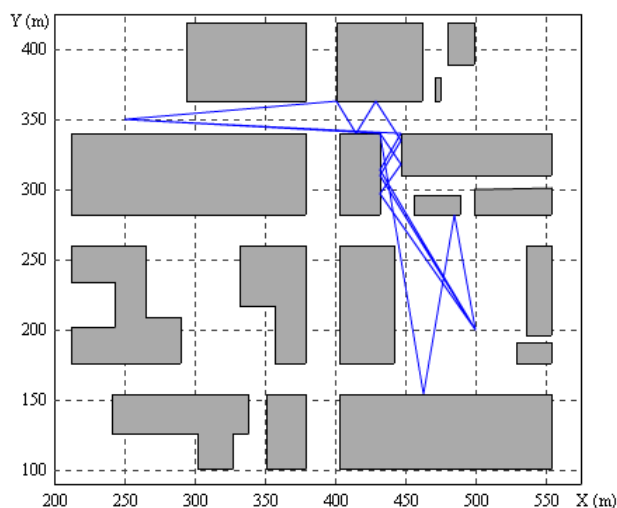


图 5.1.12 满足限制条件 3 的所有传播路径

满足限制条件 4，即两次绕射和一次反射的任意组合的所有路径如图 5.1.13 所示。

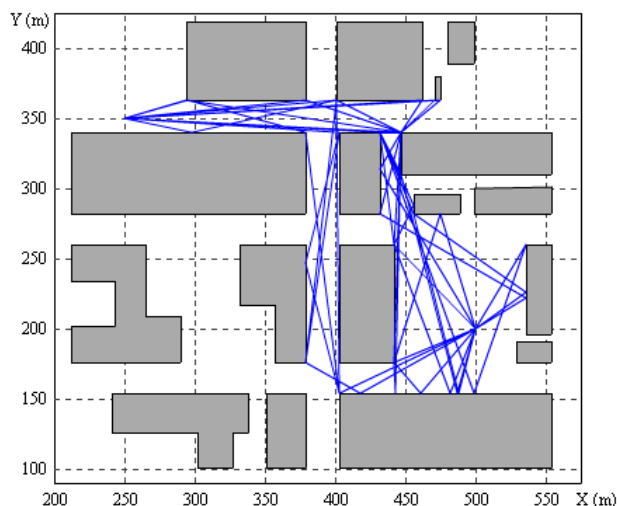


图 5.1.13 满足限制条件 4 的所有传播路径

5.2 问题二分析、建模和求解

5.2.1 问题二分析与模型建立

在问题二的场景中，在路径 AB（两点坐标分别为(300, 350)和(500, 350)）上以 50m 为间隔取 5 个位置准备放置发射机；在路径 CD（两点分别为(450, 300)和(450, 200)）上以 25m 为间隔取 5 个位置准备放置接收机；这样的话有 25 种发射机-接收机组合。

问题二要求的是哪一个组合收发机间的传播路径最多，哪一个组合最少。我们知道只要确定好了某种发射机-接收机组合，那么这个组合中的发射机位置和接收机位置便是确定的了，采用问题一中的分析、建模和求解思路，可以很容易的刻画出这个发射机-接收机组合下的主要路径。

为了方便处理，我们对 AB 线段和 CD 线段上的发射机和接收机编号，其中每个编号对应的坐标如表 5.2.1 所示：

表 5.2.1 发射机和接收机的编号及其坐标

	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号
发射机	(300,350)	(350,350)	(400,350)	(450,350)	(500,350)
接收机	(450, 300)	(450, 275)	(450, 250)	(450, 225)	(450, 200)

假定第 i 个发射机到第 j 个接收机之间满足四种路径限制条件的主要路径数目为 N_{ij} ，那么传播路径最多的发射机-接收机组合 $(i, j)_{\max}$ 应该满足如下条件：

$$\{(i, j)_{\max} | N_{ij} \geq N_{i'j'}, i', j' \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, i' \neq i, j' \neq j\} \quad (2)$$

其中，对于每个 N_{ij} ，都应满足问题一中的模型约束，即

$$1 * N_r + 3 * N_d \leq 7$$

其中， N_r 表示的是射线从第 i 个发射机到第 j 个接收机之间的路径中发生的反射次数， N_d 表示的是射线从第 i 个发射机到第 j 个接收机之间的路径中发生的绕射次数。

同样，传播路径最少的发射机-接收机组合 $(i, j)_{\min}$ 应该满足如下条件：

$$\{(i, j)_{\min} | N_{ij} \leq N_{i'j'}, i', j' \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, i' \neq i, j' \neq j\} \quad (3)$$

其中，对于每个 N_{ij} ，也都应满足问题一中的模型约束，即

$$1 * N_r + 3 * N_d \leq 7$$

其中， N_r 表示的是射线从第 i 个发射机到第 j 个接收机之间的路径中发生的反射次数， N_d 表示的是射线从第 i 个发射机到第 j 个接收机之间的路径中发生的绕射次数。

5.2.2 问题二结果

参照问题一的射线跟踪算法思路，分别将不同组合下的发射机-接收机的坐标代入本文设计的射线跟踪算法程序中，运行程序后对不同发射机-接收机组合下的主要路径数目进行对比，可以得到以下结果：

表 5.2.2 全部收发机组合的路径数目

路径数	1 号发射机	2 号发射机	3 号发射机	4 号发射机	5 号发射机
1 号接收机	63	47	113	138	50
2 号接收机	90	79	284	206	78
3 号接收机	63	46	163	146	51
4 号接收机	56	42	151	132	47
5 号接收机	32	25	128	113	25

3 号发射机（坐标为（400,350））和 2 号接收机（坐标为(450, 275)）组合下的传播路径最多，共有 284 条传播路径。

传播路径最少的收发机组合共有两组：2 号发射机（坐标为（350,350））和 5 号接收机（坐标为(450, 200)）的组合，以及 5 号发射机（坐标为（500, 350））和 5 号接收机（坐标为(450, 200)）的组合，它们的主要传播路径都是 25 条。

传播路径最多的收发机组合下的所有路径如图 5.2.1 所示：

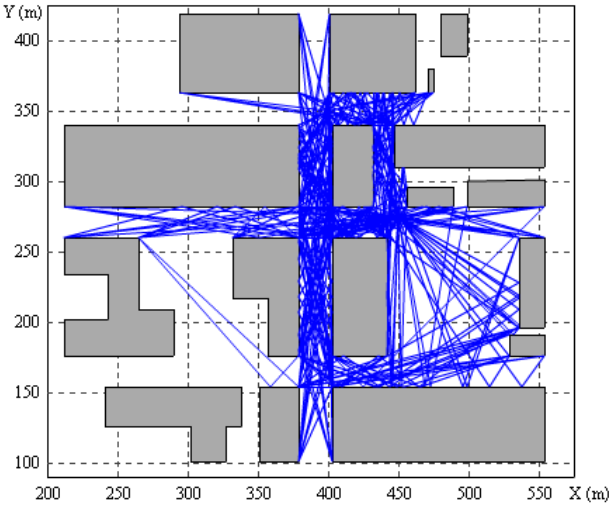


图 5.2.1 传播路径最多的收发机组合下的所有路径

其中，各个限制条件下的传播路径数目如表 5.2.2 所示；

表 5.2.3 传播路径最多的收发机组合中各个限制条件下的路径数目

	限制条件 1	限制条件 2	限制条件 3	限制条件 4	总数
传播路径数目	1	90	41	152	284

在传播路径最少的收发机组合中，2 号发射机与 5 号接收机下的所有路径如图 5.2.2 所示：

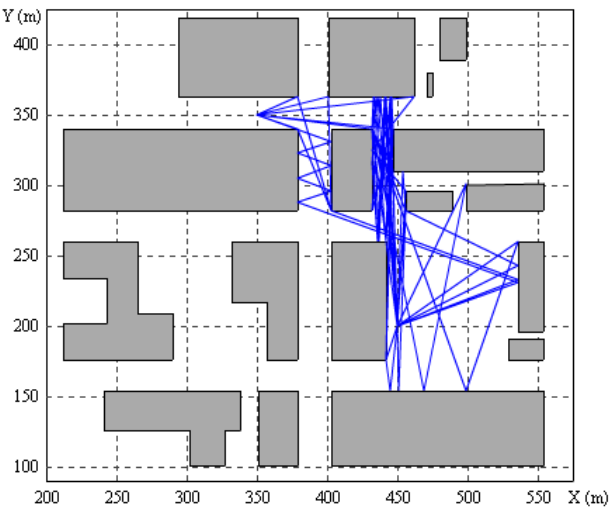


图 5.2.2 2-5 收发机组合下的所有路径

其中，各个限制条件下的传播路径数目如表 5.2.3 所示；

表 5.2.4 2-5 收发机组合中各个限制条件下的路径数目

	限制条件 1	限制条件 2	限制条件 3	限制条件 4	总数
传播路径数目	1	5	3	16	25

在传播路径最少的收发机组合中, 5 号发射机与 5 号接收机下的所有路径如图 5.2.3 所示:

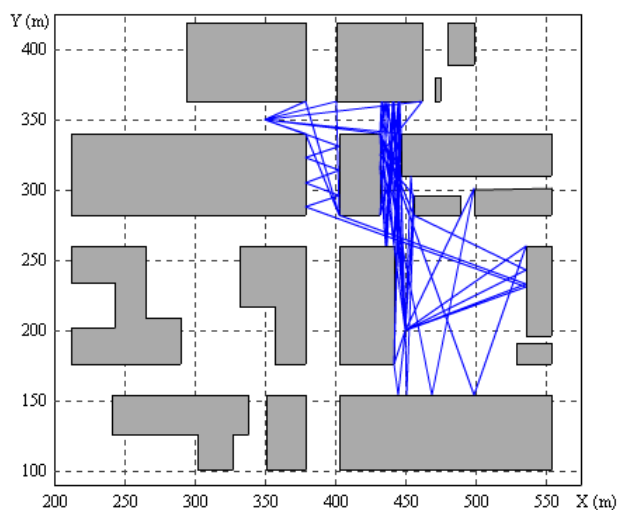


图 5.2.3 5-5 收发机组合下的所有路径

其中, 各个限制条件下的传播路径数目如表 5.2.4 所示;

表 5.2.5 5-5 收发机组合中各个限制条件下的路径数目

	限制条件 1	限制条件 2	限制条件 3	限制条件 4	总数
传播路径数目	0	5	4	16	25

5.3 问题三求解

问题三要求将问题二的求解结果进行比对, 然后寻找规律。

为了更好的分析数据, 本文分别对问题二中 25 组收发机间的总路径数和每个限制条件下的路径数作比对, 以便找出正确的规律。

(1) 对 25 组收发机间的总路径数做比对

根据第二问求解结果, 可以统计出全部 25 组发射机-接收机组合 (发射机、接收机编号与坐标对应关系见表 5.2.1) 下的总路径数如表 5.3.1 所示。

表 5.3.1 全部收发机组合的路径数目

路径数	1 号发射机	2 号发射机	3 号发射机	4 号发射机	5 号发射机
1 号接收机	63	47	113	138	50
2 号接收机	90	79	284	206	78
3 号接收机	63	46	163	146	51
4 号接收机	56	42	151	132	47
5 号接收机	32	25	128	113	25

从表 5.3.1 中我们可以发现: 3 号与 4 号发射机与任何一台接收机间的传播路径数都明显多于其他三个发射机, 而 2 号接收机与任一台发射机间的传播路径都多于其他接收机。

我们将 3、4 号发射机及 2 号接收机标注于地图上，见图 5.3.1。

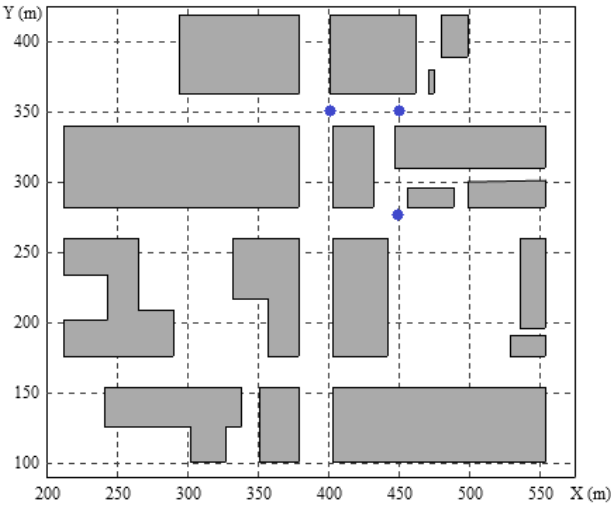


图 5.3.1 3、4 号发射机与 2 号接收机在地图上的位置

从图 5.3.1 我们可以看出，这三个点都处于不同建筑间的通道交叉口处，于是我们推测：将发射机、接收机置于建筑物间通道交叉口处，其传播路径要多于将发射机、接收机置于远离建筑物交叉口处。

为了进一步验证此规律，我们先将接收机固定放置于 2 号接收机（450,275）处，在 AB 之间以 10m 为间隔取 21 个位置放置发射机，分别计算出各个组合的路径数并统计在图 5.3.2 中。

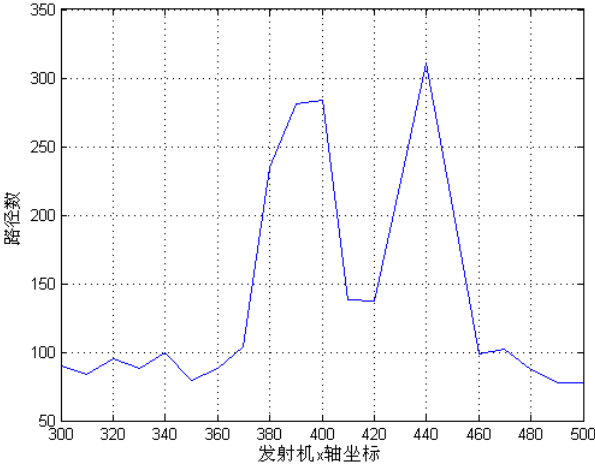


图 5.3.2 不同位置的发射机与 2 号接收机间组合的路径数

然后将发射机固定放置在 3 号发射机（400,350）处，在 CD 间以 5m 为间隔取 21 个位置放置接收机，分别计算各个组合的路径数并统计在图 5.3.3 中。

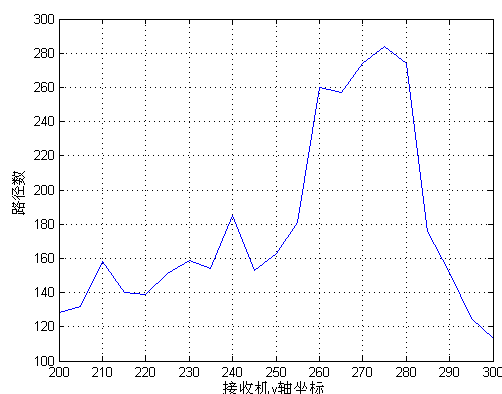


图 5.3.3 不同位置的发射机与 3 号发射机间组合的路径数

从图 5.3.2 和图 5.3.2 可以看出,当发射机的 X 坐标处于 380~400 和 430~450 之间,或接收机的 Y 坐标处于 260~280 之间时收发机之间有更多的路径数。这时收发机所处的位置范围正好在建筑通道的交叉口处。

于是我们得到以下规律:

规律一:将发射机、接收机置于建筑物间通道交叉口处,其传播路径要多于将发射机、接收机置于狭长的建筑物间通道中。

(2)对 25 组收发机在每个限制条件下的路径数做比对

为了方便分析,不失一般性,我们从所有数据中选取 1 号、2 号和 3 号发射机分别到所有接收机的数据进行统计。各个收发机组合中无限制条件下的各路径数目如表 5.3.2 所示。

表 5.3.2 15 组收发机组合在各限制条件下的路径数

发射机号	接收机号	限制条件 1	限制条件 2	限制条件 3	限制条件 4
1	1	1	13	15	34
1	2	0	23	16	51
1	3	0	13	19	31
1	4	0	12	15	29
1	5	0	5	6	21
2	1	0	14	7	26
2	2	0	24	11	44
2	3	0	14	7	26
2	4	0	13	7	22
2	5	1	5	3	16
3	1	2	23	24	64
3	2	1	90	41	152
3	3	2	37	37	87
3	4	0	36	25	90
3	5	0	28	19	81

由表 5.3.2 可以发现,限制条件 1,即只有反射的情况下收发机间的路径数极少,很多收发机组合甚至不存在只有反射的路径;而限制 4 条件,即两次绕射一次反射的情况下收发机间的路径数最多。

根据上述统计学分析，我们可以得到以下规律：

规律二：收发机间存在的纯反射路径较少，而存在的二次绕射和一次反射的路径最多。

规律二也说明了受到各种建筑的遮挡，绕射是射线传播的主要形式，也就是说视线范围内绕射点（建筑拐角）越多的收发机越有利于射线的传播。这也解释了规律一，即为什么处于交叉口处的收发机要优于处于建筑间狭长通道内的收发机。

5.4 问题四分析、建模和求解

问题四要求针对问题二中的 25 种情况，对不同路径信号的振幅进行统计学分析，包括：一、二阶矩特性，不同路径到达信号的相关性及概率密度分布函数。为了对多路径信号的振幅进行统计分析，必须先计算出每条到达接收天线处的能量，并进一步计算接收点天线的总能量。

第四问具体组织如下：

一、根据辐射场的场强公式，建立不同路径波束的初始能量模型。

二、建立单一路径下能量传输模型，然后计算出信号通过每条路径到达接收天线处的能量传输函数，最后合并计算得到接收点处的总能量传输函数。

三、假设基站发射的初始信号为余弦函数，并验证假设的合理性。结合之前求得的能量传输函数，建立最终接收点收到的能量公式。

四、根据求得的路径数据，带入接收天线收到的能量的公式，算出具体的接收信号数据。根据信号数据，计算各路径信号的幅度函数，进而分析其一、二阶矩特性，确定不同路径到达信号的相关性及概率密度分布函数。

5.4.1 问题四分析与建模

5.4.1.1 单一路径上波束的初始能量模型

在问题四中，我们的目的是计算每条到达接收天线处的能量值，并进一步计算接收点处的总能量。

为了计算每条波束到达接收天线处的能量值，我们首先需要分析从发射天线发出的每条路径上波束的初始能量。

经过发射角量化过程后的每条射线从发射天线处出发按照特定的路径开始视距传播，当碰到障碍物后会发生反射（与墙面相交时）或绕射（遇到建筑物拐角时），进而改变行进路径。若天线到达接收场点处是视距传播，则天线在场点处的辐射场的场强为

$$\vec{E}_{LOS} = \vec{E}_0 \frac{e^{jk r_0}}{r_0}$$

式中， k 为波数， \vec{E}_0 为发射电场强度， r_0 为直射波的传播路径长。该公式的理解可以参照图 5.4.1。

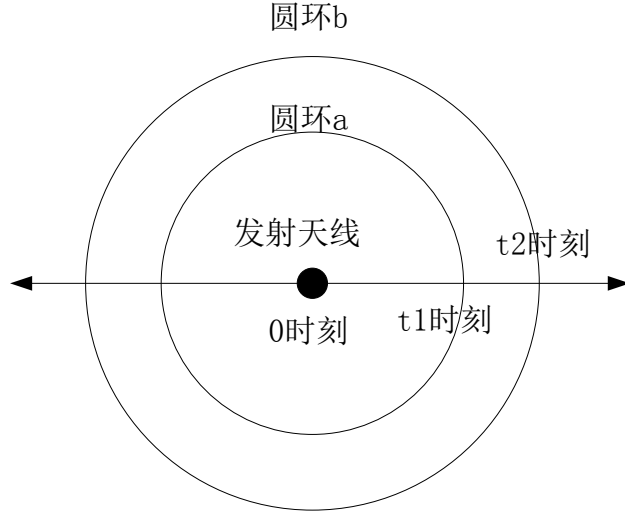


图 5.4.1 发射天线能量传播模型

发射天线在 0 时刻发出一个信号,在 t_1 时刻信号扩散传播至圆环 a 上,在 t_2 时刻信号扩散传播至圆环 b 上。根据能量守恒定律,圆环 a 上和圆环 b 上的能量是相同的,并且都和发射天线发射的总能量相同,即:

$$\vec{E}_a = \vec{E}_b = \vec{E}_0$$

根据上述分析, \vec{E}_{LOS} 即为当能量从发射机发射出去并传播了距离 r_0 后, $1/(2*\pi)$ 长度对应的圆弧上的信号所包含的能量。

$$E_a = 2\pi r_a * \frac{1}{2\pi} * |\vec{E}_{LOS}| = r_a * |\vec{E}_0| \frac{1}{r_a} = E_0$$

同理 $E_b = E_0$, 所以 $E_a = E_b$, 符合能量守恒定律。

在本问题中,理想状态下,信号每次发生反射和绕射的地方是一个没有面积的点。但是实际上,也同时为了求不同路径上信号波束的初始能量,我们把第一次发生反射/绕射的点理解为是有一定面积的,且每个点的面积相同。如图 5.4.2 所示:

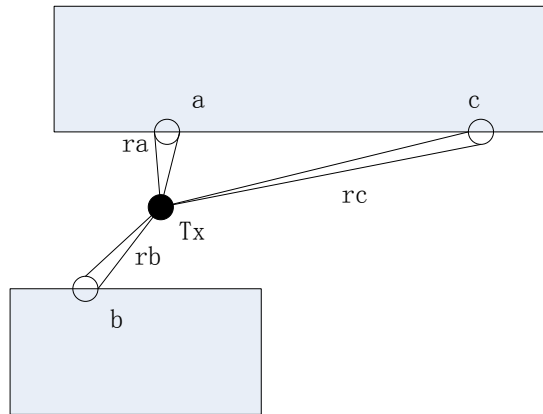


图 5.4.2 距离发射机不同距离的点处分配的能量

显然，距离发射天线越近的点被分配到的能量较多，而距离发射天线较远的点被分配到的能量较少。同时，点上分配的能量与点到发射天线的距离成反比，所以在图 5.4.2 所示的三个点上，它们分配到的能量应有下列关系：

$$E_a > E_b > E_c$$

按照一定的比例关系，并应用公式（待定），我们可以求得信号波束在到达

$$\text{a, b, c 三点时的信号能量分别为: } \vec{E}_a = \vec{E}_0 \frac{e^{jkr_a}}{r_a}, \quad \vec{E}_b = \vec{E}_0 \frac{e^{jkr_b}}{r_b}, \quad \vec{E}_c = \vec{E}_0 \frac{e^{jkr_c}}{r_c}。$$

所以，因为天线到达第一结点处（第一次绕射的拐角，或第一次反射时与墙面的交点）是视距传播，根据天线在场点处的辐射场公式，作为直射路径到达场点的能量为

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 \frac{e^{jkr_i}}{r_i} \quad (4)$$

5.4.1.2 单一路径上的能量传输函数

在此二维蜂窝射线跟踪算法模型中，信号可能发生绕射和反射，在绕射和反射时必定造成能量的变化，这里的变化包括振幅的衰减和相位的偏移。

针对信号在具体路径上遇到的各种情况，我们逐步给出对应的处理方法。

（a）发生绕射/反射后的能量变化

在本题中，我们假设微蜂窝电波传播场景下所有建筑物为理想电介质，电磁波在不同介质交接处，会发生反射，80%的能量按照反射传播规律被反射出来。

在电磁波传播路径上，当电波被尺寸较大(与波长相比)的障碍物遮挡时，电磁波改变传播方向的现象。为了解决建筑物顶点(可称为劈)上的绕射问题，需要计算绕射系数 D ，该系数体现出了绕射后绕射波强度 E_d 的衰减程度，即 $|E_d| = |E_i| \times |D|$ 。

综合以上两种情况，我们可以建立每次反射或绕射后能量发生变化的模型，变化后的能量 \vec{E}_d 与变化前的能量 \vec{E}_i 关系为：

$$\vec{E}_d = \vec{E}_i * d_n \quad (5)$$

其中：

$$d_n = \begin{cases} 0.8 & \text{发生反射时} \\ \bar{D} & \text{发生绕射时} \end{cases} \quad (6)$$

绕射系数 D 的计算方法如下：

$$D = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \cdot \left\{ \cot\left(\frac{\pi + \beta^-}{2n}\right) F(kLa^+(\beta^-)) + \cot\left(\frac{\pi - \beta^-}{2n}\right) F(kLa^-(\beta^-)) - \right.$$

$$\left[\cot\left(\frac{\pi + \beta^+}{2n}\right) F(kLa^+(\beta^+)) + \cot\left(\frac{\pi - \beta^+}{2n}\right) F(kLa^-(\beta^+)) \right]$$

式中的变量说明如下：

k 为波常数， $k = 2\pi / \lambda$ (式中 λ 为波长)。

L 是绕射点到场点之间的距离。

$n = 2 - \alpha_3 / \pi$ (α_3 的定义如图 5.4.3 所示，单位弧度)。

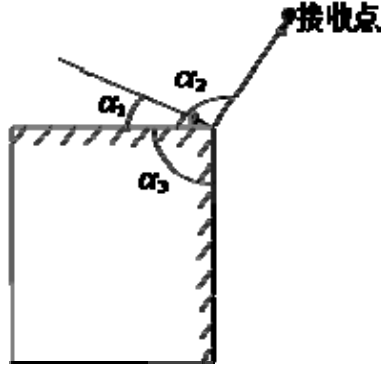


图 5.4.3 劈的绕射示意图

$F(x)$ 是用来修正 Keller 非一致性解的过渡函数，它是菲涅尔积分的一种变形， $F(x)$ 在定义域不同区间内的近似函数是不同的：

$$F(x) = \begin{cases} \left(\sqrt{\pi x} - 2xe^{j\pi/4} - \frac{2}{3}x^2e^{-j\pi/4} \right) e^{j(\pi/4+x)} & 0 \leq x < 0.001 \\ 2j\sqrt{x} \exp(jx) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-j\pi/4} - \int_0^{\sqrt{x}} e^{-j\tau^2} d\tau \right) & 0.001 \leq x \leq 10 \\ 1 + j\frac{1}{2x} - \frac{3}{4x^2} - j\frac{15}{8x^3} + \frac{75}{16x^4} & x > 10 \end{cases} \quad (7)$$

其中， $\alpha^\pm(\beta) = 2\cos^2\left(\frac{2n\pi N^\pm - \beta}{2}\right)$ 。 $\beta = \beta^\pm = \alpha_2 \pm \alpha_1$ (α_1 和 α_2 分别为入射角和绕射角，其定义如图 4 所示，这两个角的值以劈上任一边为参考)。 N^\pm 是最接近

满足下列方程的整数 $2n\pi N^+ - \beta = \pi$ ， $2n\pi N^- - \beta = \pi$ 。

(b) 多次折射/绕射后，单条路径能量的变化

当从发射机到接收机主要的路径确定之后，在路径中发生的绕射次数和反射次数是可以知道的，将某个单路径中发生的反射次数和绕射次数的和记为 N ，那么根据公式 (4) 和公式 (5)，容易求得在这个路径下的总衰减为：

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 \frac{e^{jk r_i}}{r_i} \prod_{n=1}^N \vec{d}_n \quad (8)$$

(c) 综合所有路径后，能量的总变化

在计算出每条路径上的能量变化后，将这些变化进行合并，便是所有路径上能量的总变化。

因此，根据公式（待定），容易得知所有路径上的总衰减为：

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^Q (\vec{E}_0 \frac{e^{jkr_i}}{r_i} \prod_{n=1}^N \vec{d}_n) \quad (9)$$

始终 Q 表示收发机之间的路径数。将初始信号 \vec{E}_0 提取出来，就可以得到信道的传输函数为：

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^Q (\frac{e^{jkr_i}}{r_i} \prod_{n=1}^N \vec{d}_n) \quad (10)$$

且有

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \times \vec{H} \quad (11)$$

对于每条路径的信道传输函数 $\frac{e^{jkr_i}}{r_i} \prod_{n=1}^N \vec{d}_n$ ，在单频的条件下，可将 $\frac{e^{jkr_i}}{r_i} \prod_{n=1}^N \vec{d}_n$ 化

为的 $A_i e^{j\varphi_i}$ 形式，所以信道传输函数简化为：

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^Q A_i e^{j\varphi_i} \quad (12)$$

5.4.1.3 对初始信号进行假设，并验证其合理性

在问题四中，题目并没有给出发射机所发射信号的具体表达式，只是说明信号为单频信号，且为简谐波。据此，我们不妨假设初始信号为 $\cos(\omega t)$ 。

下面我们验证假设信号为 $\cos(\omega t)$ 是合理的。

根据通信理论，为了便于分析，对于初始信号 $g(\omega, t)$ ，我们先把它转换为解析信号 $h(\omega, t)$ ：

$$h(\omega, t) = g(\omega, t) + j\hat{g}(\omega, t) \quad (13)$$

其中， $\hat{g}(\omega, t)$ 为的 $g(\omega, t)$ 希尔伯特变换，在假设初始信号为 $\cos(\omega t)$ 的情况下， $\hat{g}(\omega, t)$ 为：

$$\hat{g}(\omega, t) = \sin(\omega t)$$

代入公式（13），有

$$h(\omega, t) = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) = e^{j\omega t} \quad (14)$$

即初始信号为：

$$\vec{E}_0 = e^{j\omega t}$$

将初始信号代入公式（待定），可得

$$\vec{E} = e^{j\omega t} \cdot \sum_{i=1}^Q A_i e^{j\varphi_i} = \sum_{i=1}^Q A_i e^{j(\omega t + \varphi_i)} \quad (15)$$

题目中所描述的接收信号为

$$f(\omega, t) = \sum_{i=1}^Q A_i e^{j(\omega t + k r_i)}$$

对比公式（15）与所描述的接收信号，容易发现两个式子是一致的，因而该模型假设的初始信号与实际情况是相符的。

5.4.2 问题四模型求解及分析

依据 5.4.1 中建立的模型，我们可以求得 25 种收发机组合下的各条路径信号，并对其进行统计学分析，主要包括：一、二阶矩特性，不同路径到达信号的相关性及概率密度分布函数；

在接收点处，接收到的多径信号 $\vec{E} = \sum_{i=1}^Q A_i e^{j(\omega t + \varphi_i)}$ ，在单频条件下可以简化为：

$$\vec{E} = A e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (16)$$

其中，A 为信号所有路径的综合总增益， φ 为信号在所有路径上的综合相移。

由于之前对源信号作了解析信号的变换，所以最后的接收信号应为 \vec{E} 的实部，即

$$|f(\omega, t)| = r(\omega, t) = \text{real}(\vec{E}) = A \cos(\omega t) \quad (17)$$

为了以下方便表述，我们将 $|f(\omega, t)|$ 用 $r(\omega, t)$ 表示。

代入具体的多路径传播的数据，可以获得 25 对收发机不同路径的接收信号的表达式。再通过时间采样，获得不同时刻，不同路径的幅度值。

（a）多径传输信号的一阶矩特性

信号的一阶矩即为信号的期望，因此，多径信号的一阶矩为

$$E[r(\omega, t)] = E[A \cos(\omega t)] = 0 \quad (18)$$

即 25 组收发机组合下的多径信号具有相同的一阶矩特性，并且一阶矩都为 0。

通过将采样数据求平均，所得结果与数学公式推导结果相同。

（b）多径传输信号的二阶矩特性

信号的二阶矩有两种：二阶原点矩和二阶中心矩。

多径信号的二阶原点矩为：

$$E[r^2(w, t)] = E[(A \cos(wt))^2] = \frac{A^2}{2} \quad (19)$$

多径信号的二阶中心矩为：

$$E[(r(w, t) - E[r(w, t)])^2] = E[r(w, t)] = \frac{A^2}{2} \quad (20)$$

由此可知，多波干涉的二阶原点矩和二阶中心矩是相同的。

由于 25 对收发机组合下多径信号的综合增益 A 是有差异的，所以每对组合下的二阶矩也是不同的。根据采样数据，求得的 25 组收发机组合下的信号振幅的二阶矩值详见表 5.4.1。其中列表示发送机，行表示接收机。

表 5.4.1 25 组收发机组合下的多径信号的二阶矩值

	发送机 1	发送机 2	发送机 3	发送机 4	发送机 5
接收机 1	1.22E-04	4.04E-05	8.66E-03	2.26E-02	7.57E-04
接收机 2	1.61E-06	4.62E-05	3.56E-05	3.24E-02	1.81E-05
接收机 3	4.75E-07	1.29E-06	2.30E-03	3.54E-02	8.60E-06
接收机 4	1.85E-07	3.01E-06	9.67E-04	4.72E-03	1.47E-05
接收机 5	4.47E-10	8.79E-06	1.90E-04	2.88E-02	3.04E-06

(c) 不同路径到达信号的相关性

在问题四中，每条路径的信号是同频率的。两个同频却不同路径到达的信号间的相关系数为：

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_m} \sqrt{E_n}} \int_0^{t_b} A_m \cos(wt + \varphi_m) \cdot A_n \cos(wt + \varphi_n) dt \quad (21)$$

其中， E_m 和 E_n 为不同路径的信号的平均功率，其值如下：

$$E_m = \frac{A_m^2}{2} \quad (22)$$

$$E_n = \frac{A_n^2}{2} \quad (23)$$

对公式 (21) 进行化简，可得

$$\begin{aligned} \rho &= \int_0^{T_b} \cos(2wt + \varphi_m + \varphi_n) + \cos(\varphi_m - \varphi_n) dt \\ &= T_b \cdot \cos(\varphi_m - \varphi_n) \\ &= \frac{1}{f} \cdot \cos(\Delta\varphi) \end{aligned} \quad (24)$$

由公式 (24) 可知，同频却不同路径到达的信号间的相关系数只与其相位差 $\varphi_x - \varphi_y$ 有关。

对于频率相同，传输路径却不相同的信号，它们存在着振幅和相位的差别。当两个信号的相位差小于 $\pi/2$ 时，两个信号正相关，信号叠加后得到增强。当两个信号的相位差大于 $\pi/2$ ，小于 π 时，两个信号负相关，信号叠加后被减弱。

同时，可求得两个同频却不同路径到达的信号间的互相关函数为：

$$\begin{aligned}
R_{XY} &= E[X(t+\tau)Y(t)] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A_X \cos(w(t+\tau) + \varphi_X) \cdot A_Y \cos(wt + \varphi_Y) dt \\
&= \frac{A_X A_Y}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \cos(2wt + w\tau + \varphi_X + \varphi_Y) \cdot \cos(w\tau + \varphi_X - \varphi_Y) dt \\
&= \frac{A_X A_Y}{2} \cos(w\tau + \varphi_X - \varphi_Y)
\end{aligned} \tag{25}$$

由公式（25）可知，两个同频却不同路径到达的信号间的互相关函数是其时间 τ 差的函数，与相位差 $\varphi_X - \varphi_Y$ 有关。是一个幅度为 $\frac{A_X A_Y}{2}$ ，初始相位为 $\varphi_X - \varphi_Y$ 的余弦函数。

（4）不同路径到达信号的振幅的概率密度分布函数

根据上述假设，每个路径信号为 $A_k \cos(wt + \varphi_k)$ ，可以求出单路径信号，对时间进行采样，其振幅的概率分布函数 CDF 为：

$$F(x) = \frac{1}{\pi} (\pi - \arccos(\frac{x}{A_k})) \tag{26}$$

即其概率分布函数与相位 φ_k 无关。

概率密度函数 PDF 为：

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - (\frac{x}{A_k})^2}} \tag{27}$$

根据式子（27），可知，信号的概率密度函数与相位 φ_k 无关。

若考虑的是 25 组收发机的所有多径信号振幅，其统计特性及分析如下：

由于接受信号的振幅跨越了很大范围的数量级，所以我们先对得到的振幅数据作取对数处理。并对取对数后的数据进行分析。

最终得到多径信号的振幅的对数的均值为 0.0024，方差即二阶中心矩为 1.1408e-004。

概率分布函数 CDF 和概率密度函数 PDF 如图 5.4.4 和图 5.4.5 所示，可以看出振幅的对数服从正态分布。

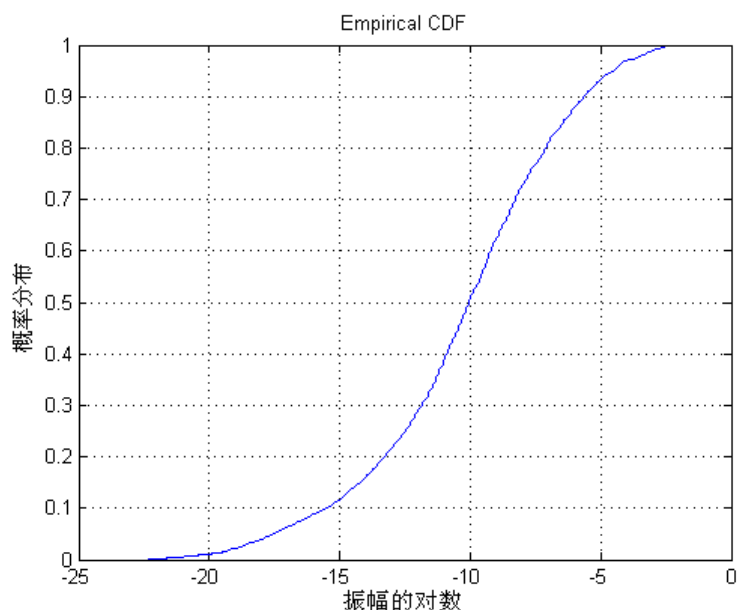


图 5.4.4 所有路径信号振幅取对数的 CDF

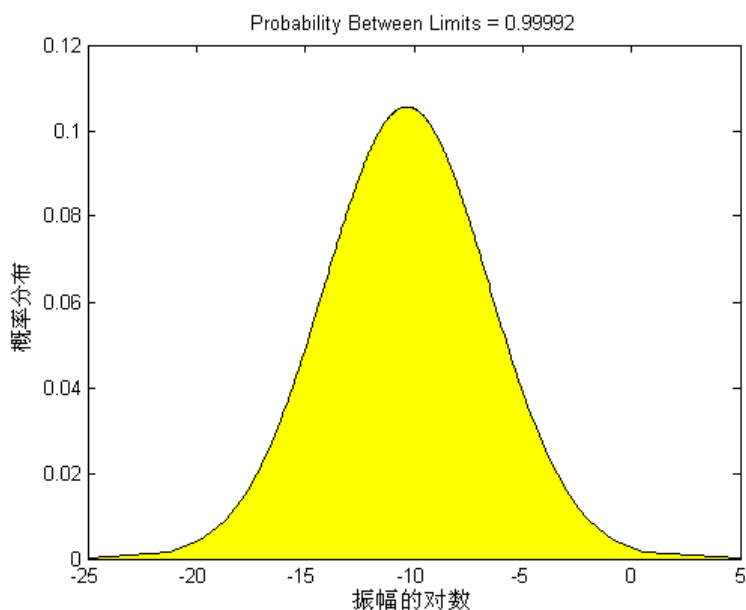


图 5.4.5 所有路径信号振幅取对数的 PDF

5.5 问题五分析、建模和求解

在问题五中，发送的信号频率由单频被拓展成多频宽带。依据前几问获得的信道传递参数，我们依旧可以获得接收机接收到的信号。由于发送的是多频宽带信号，所以不同频率的信号之间会相互影响。根据所得的波形，我们可以初步建立模型，并通过分析其包络及其统计特性，找出其中的规律，来研究同一频率、不同路径信号之间，同一路径、不同频率信号之间的相关性等

5.5.1 问题五的分析和模型的建立

通过对输出数据进行采样，描点和观察。如图 5.5.1 所示，我们发现输出的信号图像，表现成一个高频信号乘上低频信号的形式。所以，我们可以初步建

立输出信号的模型： $f(t) = \cos(w_1 t + \phi_1) (A \cos(w_2 t + \phi_2) + V)$

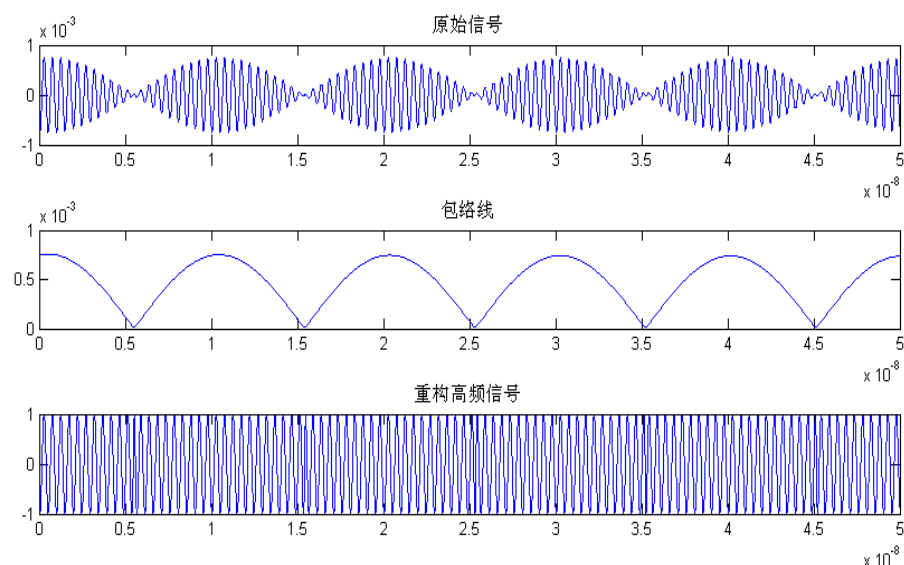


图 5.5.1 2000M 至 2100M 信号叠加输出的波形图

其中 w_1 是高频信号的频率， ϕ_1 是高频信号的初始相位。 A 是包络的幅度， w_2 是包络信号的频率， ϕ_2 是包络信号的初始相位。 V 可以理解成包络信号所叠加的直流信号。

5.5.2 问题五模型的分析

5.5.2.1 不同频段信号叠加后的信号包络的周期特性

通过观察 2000M 至 2020M，2000M 至 2040M，2000M 至 2060M 信号叠加后的输出：

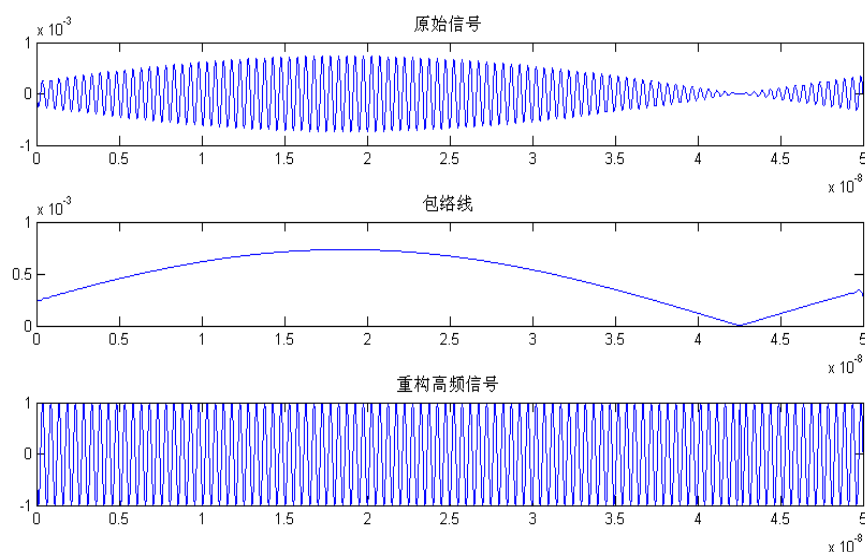


图 5.5.2 2000M 至 2020M 信号叠加输出的波形图

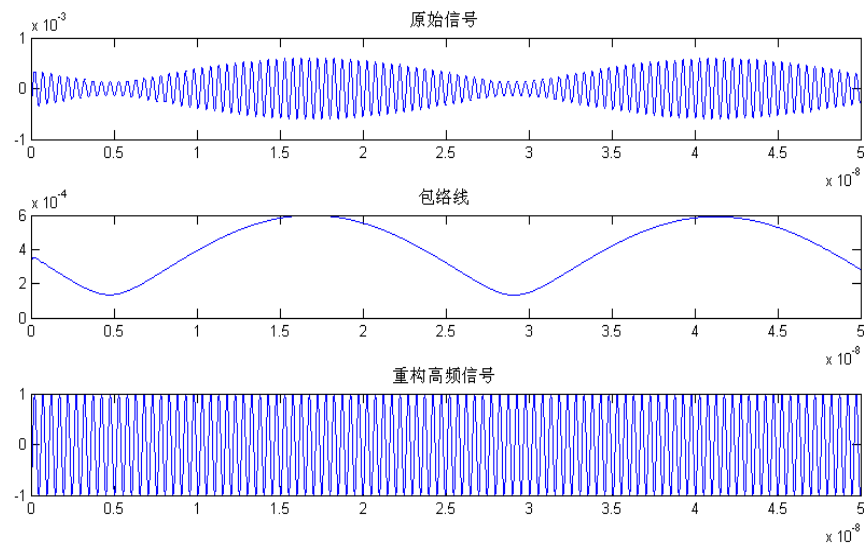


图 5.5.3 2000M 至 2040M 信号叠加输出的波形图

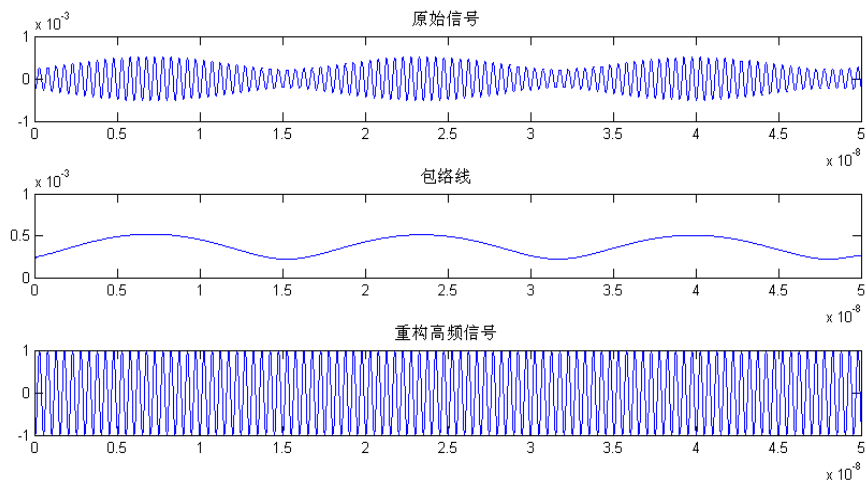


图 5.5.4 2000M 至 2060M 信号叠加输出的波形图

可以发现包络的频率都等于被叠加的最高信号频率减去最低信号频率之差。这与仅仅将最高和最低两个信号进行叠加的结果是一样的，以 2000M 信号叠加 2100M 信号的输出波形为例：

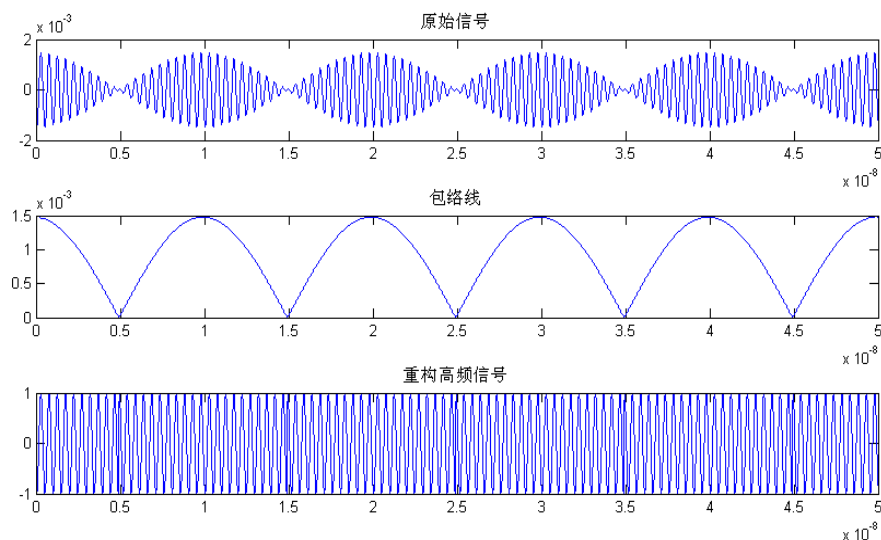


图 5.5.5 2000M 叠加 2060M 信号输出的波形图

这可以通过以下等式进行证明：在 t_1 时刻两个余弦信号的相位均到达 2π 的整数倍，即同时到达波峰，也就是到达包络的最大值处，要满足方程 $\begin{cases} 2\pi f_1 t + \varphi_1 = 2\pi n_1 \\ 2\pi f_2 t + \varphi_2 = 2\pi n_2 \end{cases}$ 。在经过时间 T 后，两余弦信号的相位又同时到达 2π 的整数

倍，即第二次到包络的最大值处，满足方程 $\begin{cases} 2\pi f_1(t+T) + \varphi_1 = 2\pi m_1 \\ 2\pi f_2(t+T) + \varphi_2 = 2\pi m_2 \end{cases}$ ，可以解得

$$T = \frac{1}{|f_1 - f_2|}。$$

5.5.2.2 不同频段信号叠加后的信号包络振幅的分布特性

通过统计 2000M 至 2001M, 2000M 至 2002M……2000M 至 2100M, 共 100 个不同信号带宽叠加后的信号包络数据的振幅，可以发现信号的包络服从正态分布：

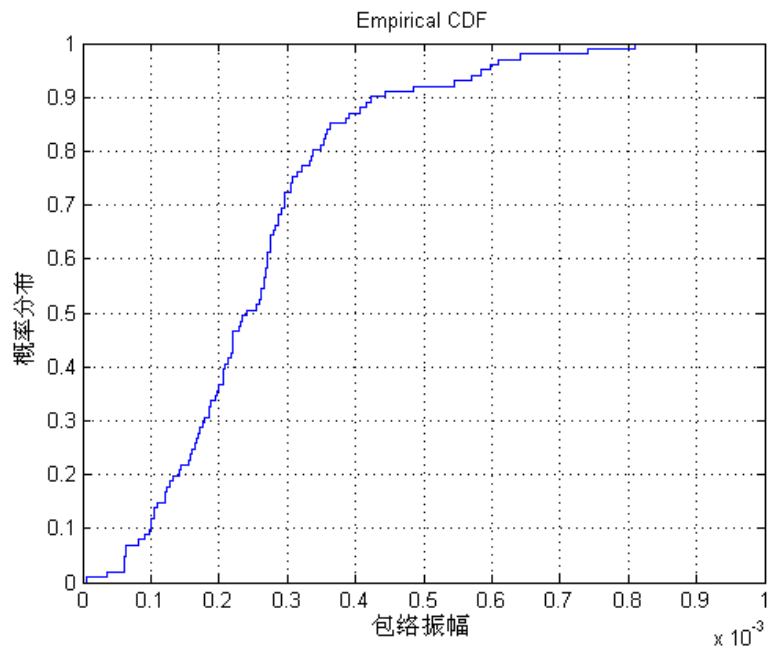


图 5.5.6 包络振幅的 CDF

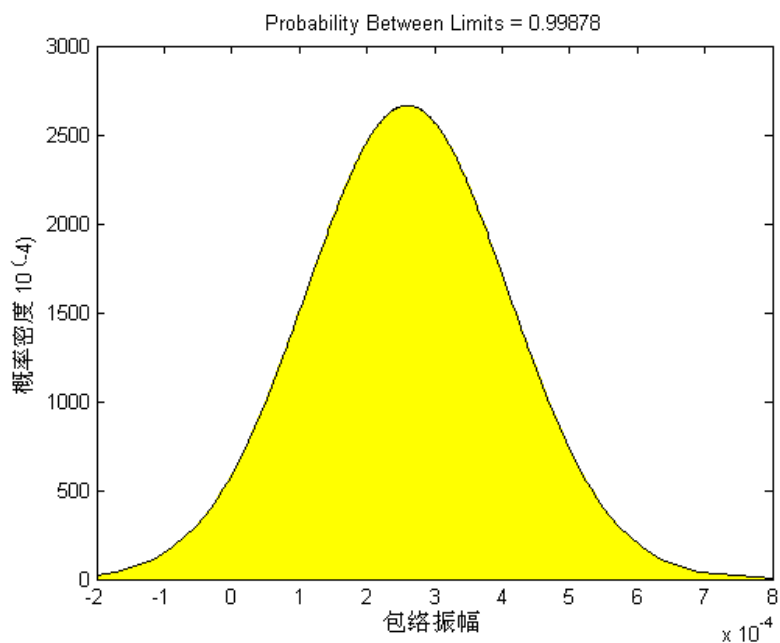


图 5.5.7 包络振幅的 PDF

5.2.2.3 不同频段信号叠加后的信号包络均值的分布特性

同上文一样，通过统计 2000M 至 2001M，2000M 至 2002M……2000M 至 2100M，共 100 个不同信号带宽叠加后的信号包络数据的均值，可以发现信号的包络的均值服从正态分布：

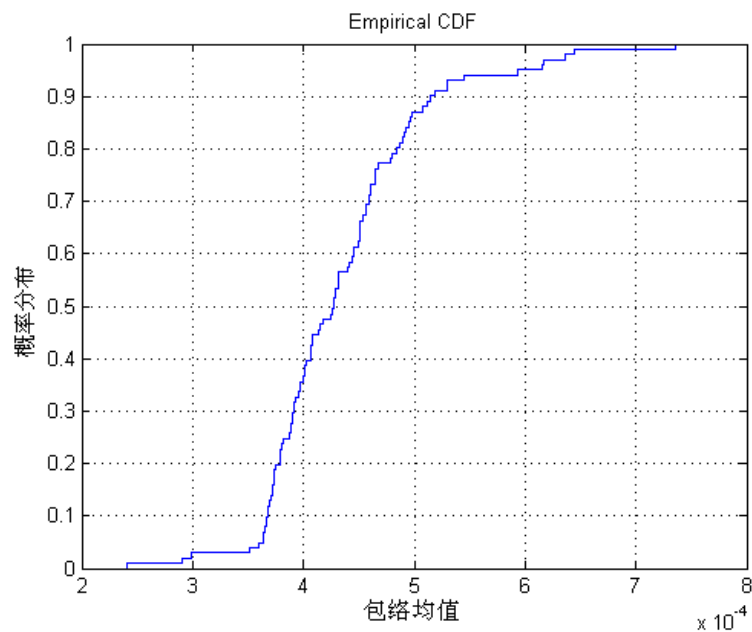


图 5.5.8 包络均值的 CDF

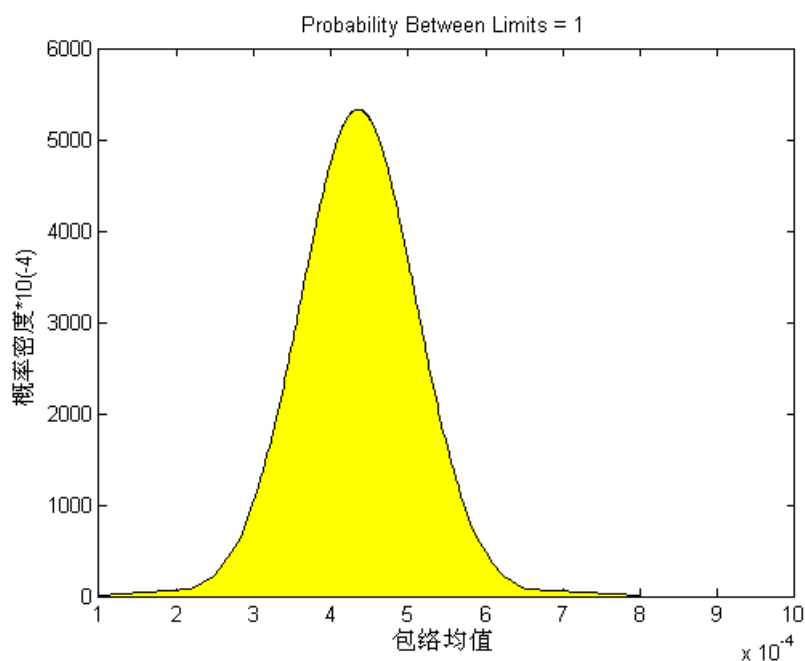


图 5.5.9 包络均值的 PDF

5.2.2.4 同频率，不同路径信号叠加后的相关性

对于频率相同，传输路径却不相同的信号，它们存在着振幅和相位的差别。当两个信号的相位差小于 $\pi/2$ 时，两个信号正相关，信号叠加后得到增强。当两个信号的相位差大于 $\pi/2$ ，小于 π 时，两个信号负相关，信号叠加后被减弱。

以下图选取的三个不同路径的信号 $f_1(t)$ ， $f_2(t)$ ， $f_3(t)$ 为例：

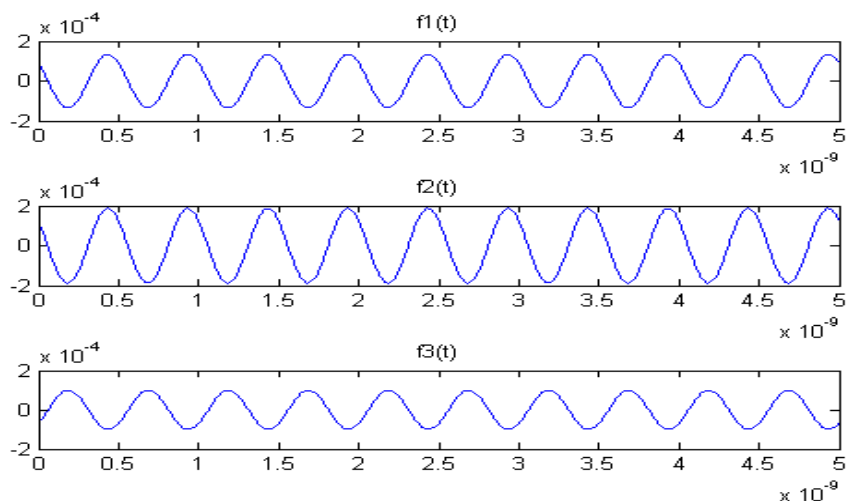


图 5.5.10 信号 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$

其中信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的相位差很小，信号 $f_1(t)$ 与 $f_3(t)$ 的相位差接近 π 。我们对 $f_1(t) + f_2(t)$, $f_1(t) + f_3(t)$ 的波形进行采样，得到以下结果：

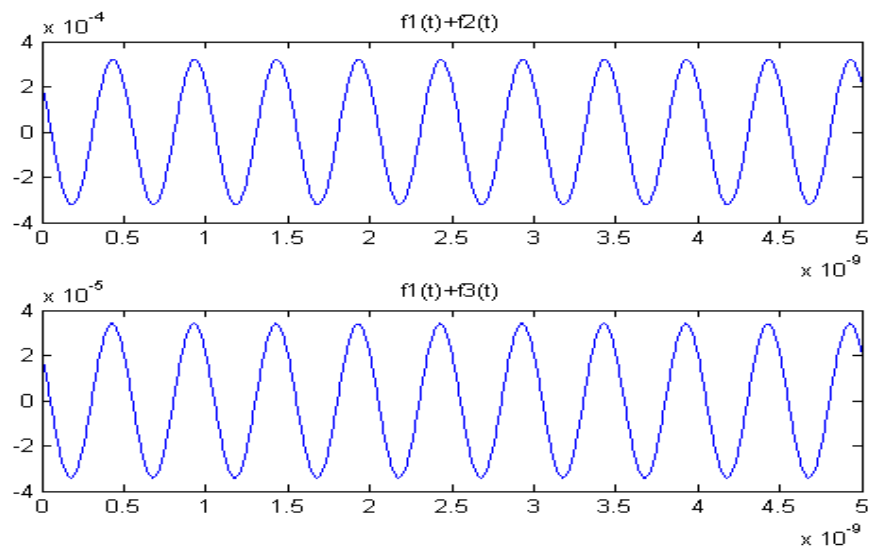


图 5.5.11 波形采样结果

显然， $f_1(t)$ 同 $f_2(t)$ 相加后，信号得到了增强，振幅约为 $3e-4$ 。 $f_1(t)$ 同 $f_3(t)$ 相加后，信号受到了削弱，振幅约为 $3e-5$ 。

六、 模型改进方向

由于题中信息有限，所以本文模型在实际应用时仍然存在改进空间，若信息充足，则为使模型更具实用性，可在如下两个方面进行改进：

1. 在问题一的模型基础上，将二维射线跟踪模型扩展到三维空间。当在二

维平面内找到一条到达接收机的射线时，在三维空间中就有两条射线路径与其对应，其中一条是多次墙面反射路径，另一条是多次墙面反射和一次地面反射路径。本文的射线跟踪方法就是在二维平面内进行的，当找到到达接收机的所有射线后，可以按照一定的算法把他们转化为三维空间中的传播路径。

2. 在问题一种可以采用分块的方法来加速算法执行速度，这种方法的基本思想是，把简化了的市区二维平面图分成几个大的方块，其中每一方块包含两个或者两个以上的建筑物，当检测到该方块不在一个辐射源的有效范围内时就放弃该方块内的所有物体，即不对这些物体做有效性检测。

七、 参考文献

- [1] 吴剑锋,曹伟,程勇. “用于微蜂窝电波传播预测的二维射线跟踪模型”,南京邮电学院学报(自然科学版), vol.21, No.2, June. 2001.
- [2] 顾晓龙. “利用可见性概念改进基于镜像原理的射线追踪法”, 电波科学学报, Vol. 16, No, 4, pp. 16-19, 2001
- [3] George Liang, Henry L. Bertoni, ”A New Approach to 3D Ray Tracing for Site Specific Propagation Modeling,” IEEE VT. C., PP. 1113-1117, 1997.
- [4] D. N. Schettino, F. J. S. Moreira and C. G. Rego, “Efficient Ray Tracing for Radio Channel Characterization of Urban Scenarios,” IEEE Trans. Magn., vol. 43, no. 4, pp. 1305-1308, Apr. 2007.
- [5] 廖斌, 赵昵丽, 朱守正,”基于虚拟源树的射线跟踪算法的研究,” 华东师范大学学报, 2008:103-108
- [6] Chiya Saeidi, Farrokh Hodjatkashani, and Azim Fard, “New Tube-Based Shooting and Bouncing Ray Tracing Method,” 2009 International Conference on Advanced Technologies for Communications, pp.269-273
- [7]袁正午, 移动通信系统终端射线跟踪定位理论与方法, 2007, 北京: 电子工业出版社

附录 25 组收发机路径数明细

发射机	接收机	总路径数	类型 1	类型 2	类型 3	类型 4
1	1	63	1	13	15	34
1	2	90	0	23	16	51
1	3	63	0	13	19	31
1	4	56	0	12	15	29
1	5	32	0	5	6	21
2	1	47	0	14	7	26
2	2	79	0	24	11	44
2	3	46	0	14	9	23
2	4	42	0	13	7	22
2	5	25	1	5	3	16
3	1	113	2	23	24	64
3	2	284	1	90	41	152
3	3	163	2	37	37	87
3	4	151	0	36	25	90
3	5	128	0	28	19	81
4	1	138	4	19	55	60
4	2	206	3	39	58	106
4	3	146	4	23	47	72
4	4	132	1	21	41	69
4	5	113	0	13	44	56
5	1	50	0	14	8	28
5	2	78	0	24	10	44
5	3	51	0	14	12	25
5	4	47	0	13	10	24
5	5	25	0	5	4	16