

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

# 第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校 东南大学

---

参赛队号 10286030

---

	1.荆舒晟
队员姓名	2.王元文
	3.谈冬晖

---

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)



## 第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目                      微蜂窝环境中无线接收信号的特性分析

### 摘                      要：

本文研究了本赛题的所有问题，包括：以微蜂窝系统为背景，研究了以测试射线法和虚拟源射线跟踪法为代表的射线跟踪技术，并用这两种方法对射线跟踪进行建模。能够利用这两个模型对给定的实际情况进行计算，得到主要传播路径并可可视化，通过射线跟踪过程分析了这两种模型各自的优缺点；对多波干涉的振幅进行了统计学分析，对宽带多波干涉现象进行了数学建模，并分析了合成波的包络统计特性。

问题一中，对给定位置的二维视图中的发射机和接收机，使用测试射线法模型，在不同的量化精度下，求解出在 7 次反射内没有路径到达；接着使用虚拟源射线跟踪法模型，在题述的反射和绕射次数的限制下，找出了所有可能的路径数为 67，并可可视化在二维视图中，与测试射线法模型得到的结论相同，在 7 次反射内没有路径到达；比较题述的四种不同的情况，发现路径中含有两次绕射的情况占大多数；测试射线法模型采用圆接收，存在量化精度和计算量的矛盾，但是算法简单；虚拟源射线跟踪法采用点接收，可以得到精确的传播路径，但算法相对复杂。

问题二中，使用虚拟源射线跟踪法模型对题述的 25 种不同位置的发射机和接收机的情况进行了射线跟踪，得到每种情况传播路径总数；其中传播路径数最多的情况是[Tx(400,350),Rx(450,275)]，最少的是[Tx(500,350),Rx(450,200)]，路径数分别为 311 和 42，对这两种情况的主要传播路径进行了比对，发现接收机和发射机的位置处于十字路口时，可视范围大，从而传播路径多。

问题三中，根据问题二中的 25 种情况的传播路径进行比对分析，发现含有绕射的路径在传播过程中占主要地位；在含有绕射的路径中，含有两次绕射的路径占主要地位；路口处的传播路径多于一般街道处；同一条街道上非路口处的发射机的传播路径数大体相当，与位置无关；非路口处相对空旷的位置收发

能力更强；大体上距离越近收发能力越强；大体上纯反射路径越多，总路径也越多等规律。

问题四中，针对 25 种不同位置的发射机和接收机的情况，通过时间平均的方法计算出了同一频率、不同路径的多波干涉的接收信号的振幅的一阶矩和二阶矩，不同路径到达信号的相关性与每条路径接收电场强度大小有关，得到了其概率密度分布函数接近瑞利分布的结论。

问题五中，将宽带多波干涉现象建模为若干条长度确定带有随机相位的矢量叠加问题（纯反射路径和有绕射路径强度相差至少一个数量级，纯反射路径强度占主导）；分析合成波的包络特性，概率密度函数分布函数接近瑞利分布。

本文的创新点在于利用虚拟源射线跟踪法模型完整精确地找出所有给定情况的传播路径数，分析出发射机和接收机位置变化带来的路径数的变化规律，并对宽带多波干涉现象进行了合理的数学建模。

**关键词：**微蜂窝 射线跟踪 测试射线法 虚拟源射线跟踪法 多波干涉 宽带多波干涉

## 1. 研究背景

自从 80 年代后期以来,随着数字蜂窝移动通信在世界范围内飞速发展,有限的频谱资源与急速增长的容量需求之间的矛盾,使得无线通信就已经向着“微蜂窝”的方向发展了。在这一进程中,一方面电波的有效覆盖问题日益突出,另一方面原有的大区传播模型越来越不适用,因而出现了微小区电波传播的研究热潮,尤其是近几年,电波传播特性的研究越来越集中在对微蜂窝传播环境的传播特性的研究上,因此对于微蜂窝小区的电波传播的研究是极具有现实意义的,它为微蜂窝技术的发展奠定了基础。

掌握电波传播是对任何无线网络提供合理设计、部署和管理策略的基础。事实上,正是由于无线信道的特性使得无线网络比有线网络复杂得多。电波传播与特定的场所密切相关,并且会根据地形、工作频率、移动终端的速度、干扰源和其它动态因素发生明显的变化。通过主要参数和数学模型描述的无线信道的准确特性,对于预测信号的覆盖范围、可达到的数据速率、可选信号的特性性能属性和接收方案、分析不同系统的干扰和决定基站天线安装的最佳位置都是十分重要的。

射线跟踪是一种被广泛用于移动通信和个人通信环境中的预测无线电波传播特性的技术,可以用来辨认出多径信道中收发之间所有可能的射线路径。一旦所有可能的射线被辨认出来后,就可根据电波传播理论来计算每条射线的幅度、相位、延迟和极化,然后结合天线方向图和系统带宽就可得到到达接受点的所有射线的相干合成结果。

射线跟踪过程包括两个方面的内容:射线轨迹的搜索以及射线场强的计算。对于轨迹搜索,只涉及到一些几何分析相关知识;而对于射线场强计算,由于电磁场是矢量场,还涉及到复杂的电磁场理论知识。

## 2. 问题重述

可以假设微蜂窝环境下建筑物的高度高于基站天线的高度，从而将三维问题近似地简化成二维问题，只考虑两种传播机制：反射和绕射。这种简化大大地提高了射线跟踪模型的预测效率，同时能够得到可以接受的预测精度。

本题是针对给出的渥太华市区部分区域二维视图进行建模分析。对于城市微蜂窝的二维模型，建筑群可被划分为一定的“块”，建筑物(即图 1 中带有灰色阴影的多边形)则被定义为“多边形”，多边形的“边”代表建筑物的表面，多边形的“顶点”则代表了建筑物的拐角。

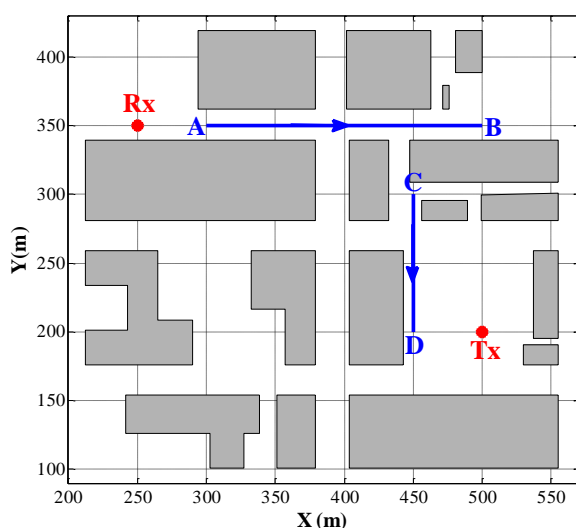


图 2.1 渥太华市区部分区域二维视图

在多边形的顶点上仅能产生绕射，而在多边形的边上仅能产生反射，这些多次的反射、绕射及其组合便是收、发射机间的传播路径。二维射线跟踪模型可以通过以下两种规律分别确定反射传播路径和绕射传播路径：

- (1) 反射传播路径，如图 2.2(a)所示，产生反射时入射角  $\theta_i$  等于反射角  $\theta_r$ ；
- (2) 绕射传播路径，如图 2.2(b)所示，不论入射线以任意角度入射到建筑物顶点上，绕射射线都会以任意出射角向没有建筑物覆盖的区域传播。

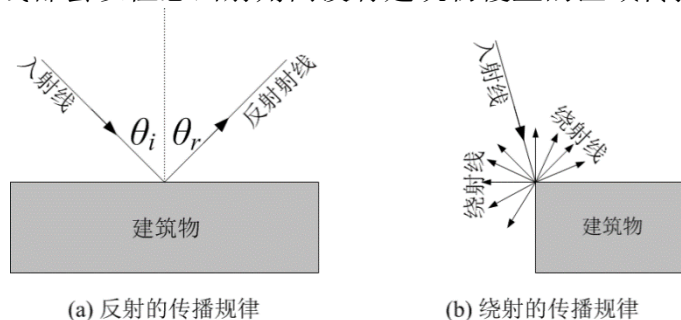


图 2.2 两种传播机制的传播规律示意图

本道题需要研究下列问题：

### 一、基本问题

- (1) 电波从发射天线出发，向空间各个方向均匀发射。为了能够进行数值计算，

我们需要将总的发射能量均匀地分配到若干条射线上，这个过程称之为发射角量化过程。显然，规定的射线条数越多，量化就越精细，计算量也就越大。因此请根据实际情况，首先选择定量化的精细程度，然后跟踪确定发射机 Tx (坐标为(500, 200))和接收机 Rx (坐标为(250, 350))间的主要传播路径，并可视化展示在图 1 中。

(2) 如图 1 所示，在路径 AB (两点坐标分别为(300, 350)和(500, 350)) 上以 50m 为间隔取 5 个位置准备放置发射机；在路径 CD (两点分别为(450, 300)和(450, 200)) 上以 25m 为间隔取 5 个位置准备放置接收机；这样有 25 种发射机-接收机组合。请问哪一个组合收发机间的传播路径最多，哪一个组合最少？

(3) 将(2)中所有发射机-接收机组合的传播路径进行比对，请寻找尽可能多的规律。

## 二、宽带问题

(4) 两个或两个以上的波相遇时，在一定情况下会相互影响，这种现象叫干涉现象。声波、光波和其他电磁波等都有此现象。考虑如下的多波干涉问题：对于(2)中提到的 CD 路径上的所有接收点，从发射机出发的电波都有多个传播途径(可能是多次反射传播、多次绕射传播或是反射与绕射的任意组合传播)到达这些点，这些频率相同、振动方向相同、初相位相同的简谐波（即正弦波）在各个接收点相遇叠加，出现某些接收点振动始终加强、而在另一些接收点振动始终减弱的现象，这种现象称为多波干涉现象。

上述接收点处，多波干涉形成的接收信号可以描述为

$$f(\omega, t) = \sum_{i=1}^Q A_i e^{j(\omega t + k r_i)} \quad (2.1)$$

上式中，Q 为到达某接收点的传播途径总数； $A_i$  和  $r_i$  分别为到达接收点的第 i 条传播路径的信号电场强度和长度； $k r_i$  为长度为  $r_i$  的传播路径上的相位积累； $\omega = 2\pi f = 2\pi c / \lambda$  (c 为光速，值为  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ )。

请针对上述 25 种情况，对这种多波干涉的振幅  $|f(\omega, t)|$  进行统计学分析，包括：

一、二阶矩特性，不同路径到达信号的相关性及概率密度分布函数；

(5) 继续考虑图 1，从发射机同时发射一组功率相同的电波，频率从 2000Mhz 到 2100Mhz，间隔近似 1Mhz，这样我们总共要同时发射 101 个单频信号。每个单频信号都会形成(4)中提到多波干涉问题，多个单频信号会形成宽带多波干涉现象，请对这种宽带多波干涉现象进行数学建模，并分析合成波的包络统计特性，如同一频率、不同路径信号之间，同一路径、不同频率信号之间的相关性等。

### 3. 数学模型

#### 3.1 模型假设

针对所提出的问题，我们首先要求得从给定发射机到接收机所有可能的路径。题面为简化计算复杂度，仅考虑下列收、发射机间传播路径：

- 只存在反射，且反射次数不超过 7 次；
- 只存在绕射，且绕射次数不超过 2 次；
- 一次绕射与一次、两次、三次或四次反射的任意组合；
- 两次绕射和一次反射的任意组合。

为求得以上几种情况的可能路径的数目及其场强变化，我们需要用射线跟踪法去跟踪可能的路径。首先将测试射线法模型应用到本题中，这种模型采用有范围的圆接收，但随着研究深入，我们发现这种方法不能很好的解决绕射问题，存在发射角间隔的量化精度与计算量的矛盾。我们选择用虚拟源射线跟踪法模型对反射和绕射进行更全面的计算，这种模型采用的是点接收，可以得到精确的路径。下面具体介绍本题中用到的两种模型。

#### 3.2 测试射线法模型

测试射线法模型具体如下：首先取定坐标系，用来确定墙面等障碍物和发射机、接收机的位置。选定任一根由发射机发出的射线作为参考线。在这个发射线前进过程中将遇到墙壁阻挡从而产生第一次反射线或遇到建筑物顶点绕射而产生第一次绕射线。接着该射线又将遇到另一墙壁的反射或另一建筑物顶点的绕射而产生第二次射线(反射线或绕射线)。最后依此类推产生第  $N$  次反射线，得出一根发射线和  $N$  根射线组成的射线序列<sup>[1]</sup>。以上述参考线为基准，把从发射机发出的射线增加一个固定的角度  $\phi$ ，重复上述步骤。用这种每一次增加一个固定角度  $\phi$  的方法不断地改变发射机发出射线的方向。从而能够得到每个方向射线的射线序列。这样一来，发射圆周被角度间隔  $\phi$  等分，每条射线代表了一个角度区间。角度间隔  $\phi$  越小，量化精度越高，越能反映真实情况，同时计算量也会增加。

在这种方法中，因为射线有角度误差，所以不能用点接收。本题已经简化为二维问题，所以要引入接受圆的概念。如下图所示，取定一个接收点，考察位于该点附近并与该射线垂直距离为  $d$  的射线。设想把组成某一路径的射线序列拉直，其总长度为  $L$ ，相邻射线角度间隔为  $\phi$ 。以接收机为中心，以  $\phi L/2$  半径(即接收半径)作一圆(即接收圆)。可见，不同  $L$  对应不同接收圆。若  $d \geq \phi L/2$ ，近似认为这根射线对接收机场强没有贡献。若  $d < \phi L/2$ ，则需要计算这根射线对接收机场强的贡献。

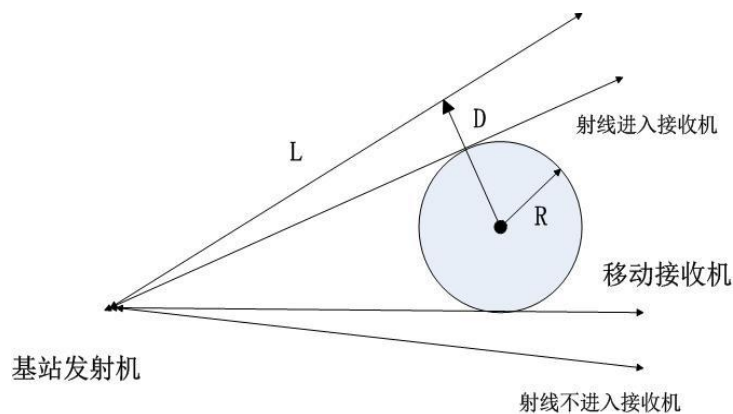


图 3.1 圆接收示意图

将所有对接收机场强有贡献的射线在接收机产生的场强叠加起来，最终求出接收机处的场强。对于建筑物顶点的绕射情况同样应采用接收圆的概念，判断方法和在接收点处的一致。

这种模型方法的优点就是与接收机的位置无关，只需要让有确定方向的射线进行有限次数的绕射或者反射，最后进行圆接收；但缺点就是对于跟踪绕射线非常复杂繁琐，因为每进行一次绕射，方向就不确定了，又需要对绕射的出射射线的方向进行重新量化，并且出射角量化过程的精度越高，计算量越大，存在矛盾。所以我们选择采用点接收的虚拟源射线跟踪法模型，来找到精确的路径。

### 3.3 虚拟源射线跟踪法模型

#### 3.3.1 虚拟源及其可视范围

在整个电波传播过程中，通常有三类射线：一类是由发射源所产生的发射线；一类是由墙面的镜像反射所产生的反射线，由镜像理论可知，这些反射线可以看作是一个虚拟源—实际源的镜像所产生的；还有一类是由墙角发射绕射时所产生的绕射线，这些绕射线也可以看作是一个虚拟源—绕射源所产生的。因此整个传播环境中的射线就相当于由三类源所产生的——发射源、反射源和绕射源<sup>[2]</sup>。

这三类源的位置分别由发射机天线的位置、镜像的位置以及绕射点的位置所确定<sup>[2]</sup>。其中发射源的四周不存在遮挡，因而其可视区域为圆周（如图 3.2-a）；反射源的作用范围是由产生反射源的墙面被照射部分（可见部分）所确定的，由于反射面的可见部分大小一定，故反射射线只可能存在于反射源与反射面可见部分的两个端点连线所夹区域内（如图 3.2-b）；绕射源的作用范围是由发生绕射现象的墙角（劈）所确定的，它由与该劈相连的两个墙面所围成的（如图 3.2-c）。



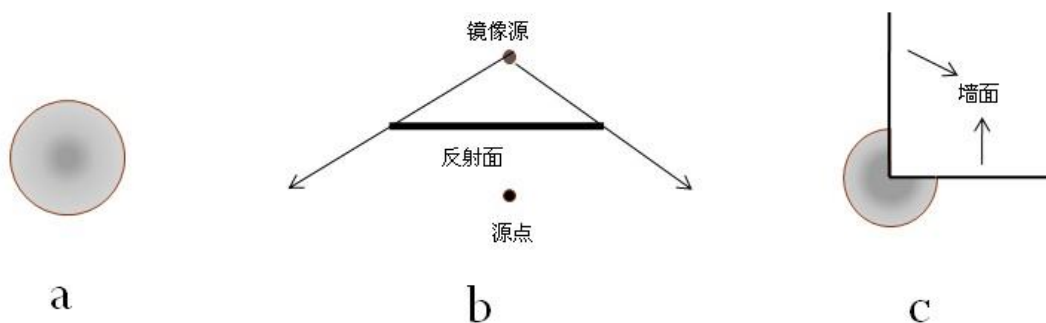


图 3.2 三种辐射源可视区域

### 3.3.2 虚拟源树结构

射线从发射机出发，经过反射面或绕射点作用后，最终到达接收机。这过程中，射线经过的发射面或绕射点可以用树结构图来记录。另外，我们将接收机也加入到由发射源、反射源和绕射源组成的树结构中，这样的树结构已经完全代表了整个传播路径。由于波经历反射或绕射时，反射波或绕射波电场幅度将变小，因此可以设一个整数值  $N$ ，当考虑层数大于  $N$  时，可以认为此时射线中电磁波衰减很大，可以忽略。

虚拟源树结构建立完成之后，就可以得到射线路径：从树结构的最末端(即场点)出发，找出所有能够到达场点的树结构的枝，从而得到射线传播路径上所有的反射面和绕射顶点。再由几何运算，就可以求出射线与路径上反射面和绕射顶点的交点，最终求得传播路径。

### 3.3.3 有效性检测

对虚拟源树中的任意一个节点(接收机除外)，必须判断它的有效性，也就是说是否存在一条有效路径，使得发射机和接收机之间在经过若干次反射、绕射后，能够连通。这里，我们分两种情况讨论，分别是有效反射的判断和有效绕射的判断。我们通过例子来说明原理。

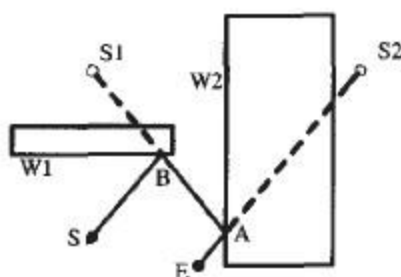


图 3.3 虚拟源有效反射的示例

对于图 3.3 中的例子， $S$  为发射源， $E$  为接收机， $S1$  为  $S$  在墙  $W1$  上反射产生的反射源， $S2$  为  $S1$  在墙  $W2$  上反射产生的反射源，我们现在来判断  $S2$  是否有效。

首先，将  $E$  与  $S2$  的连线所在的直线与产生  $S2$  的墙  $W2$  所在直线求交点，得到交点  $A$ ，接下来判断  $A$  是否在墙面  $W2$  上，若满足这个条件，再把  $S2$  的父节点  $S1$  与  $A$  的连线所在的直线和产生  $S1$  的墙  $W1$  所在直线求交点，得到交点  $B$ 。再次判断交点  $B$  是否在墙  $W1$  上，若满足这个条件则按照此逻辑递推，

直到父节点是  $S$ ，此时，就可以得到是  $S2$  有效的。若递推过程中的任意一次不满足，即其中任意一次判断得到交点不在相应的墙面上，则可以得到  $S2$  是无效的。

现在我们再来看一个  $S2$  无效的例子：

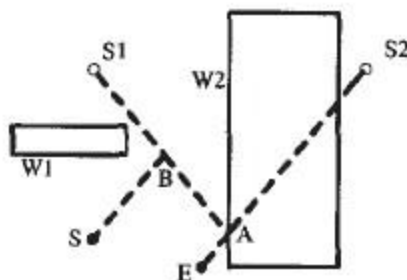


图 3.4 虚拟源无效反射的示例

从图 3.4 中我们可以看到，在求出虚拟源  $S1$  与交点  $A$  连线所在的直线和墙面  $W1$  所在直线的交点  $B$  后，得到的  $B$  并不在墙  $W1$  上，即并不存在一条射线从  $S$  经过  $W1$ 、 $W2$  反射后到达接收机  $E$ ，所以虚拟源  $S2$  是无效的。

对于有效绕射的判断则相对简单，只需要判断绕射的下一次接收点是否在绕射源张角范围内。

有了这两种虚拟源树节点的判断方法，就可以判断虚拟源树的有效性，从而得到给定发射机和接收机位置后所有有效路径。

这种模型的优点是采用点接收，很好地处理绕射的问题，可以得到精确的传播路径，但是当迭代层数变大时，计算量会比测试射线法模型大很多。

总结一下，判断虚拟源树节点是否有效的流程图如下图 3.5 所示。

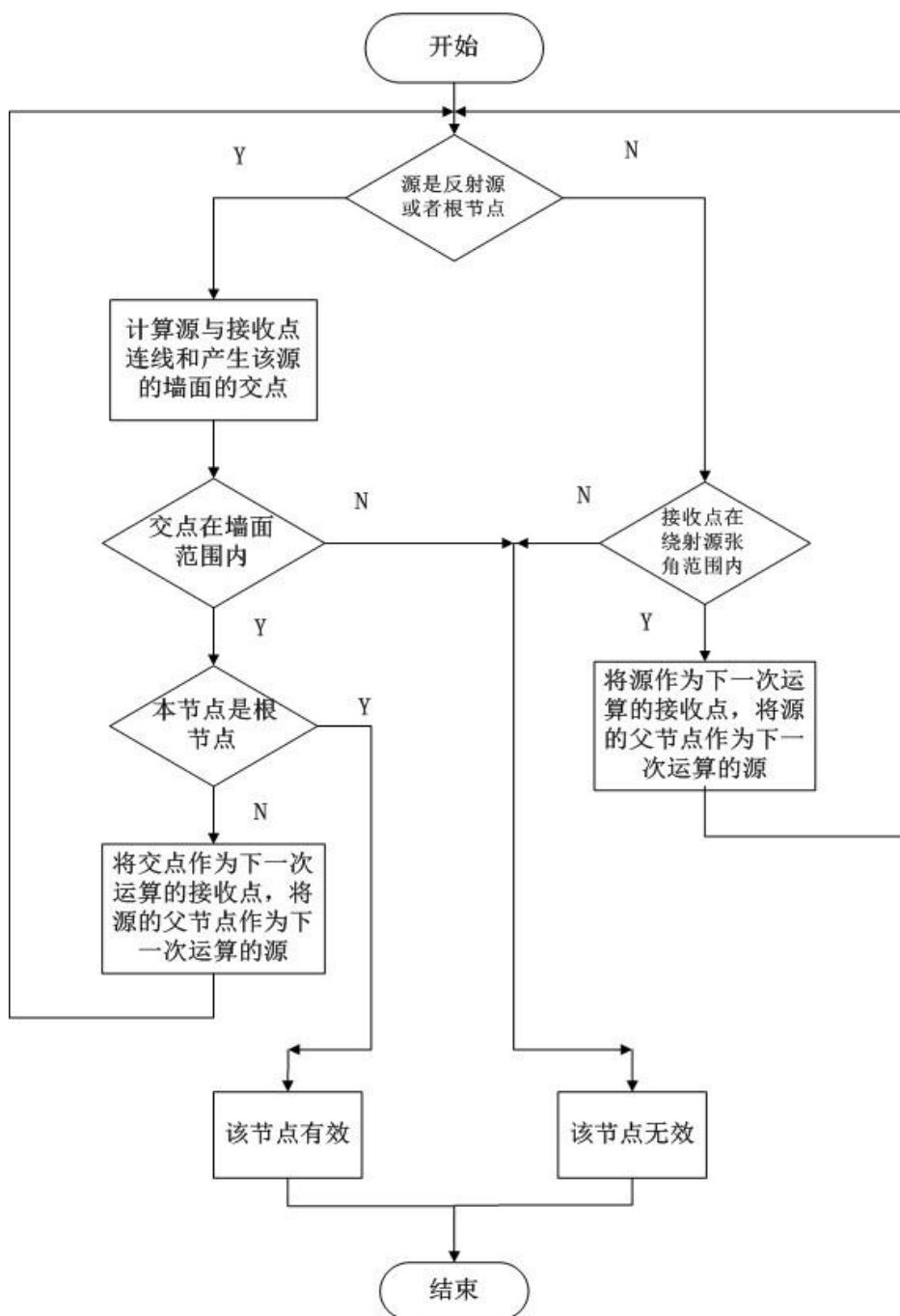


图 3.5 判断虚拟源树节点有效性判断的流程图

## 4. 问题一求解

由于一下问题求解需要用到墙面与顶点的编号，用来表示路径节点，所以我们把每个建筑物顶点都编了号，如图 4.1。

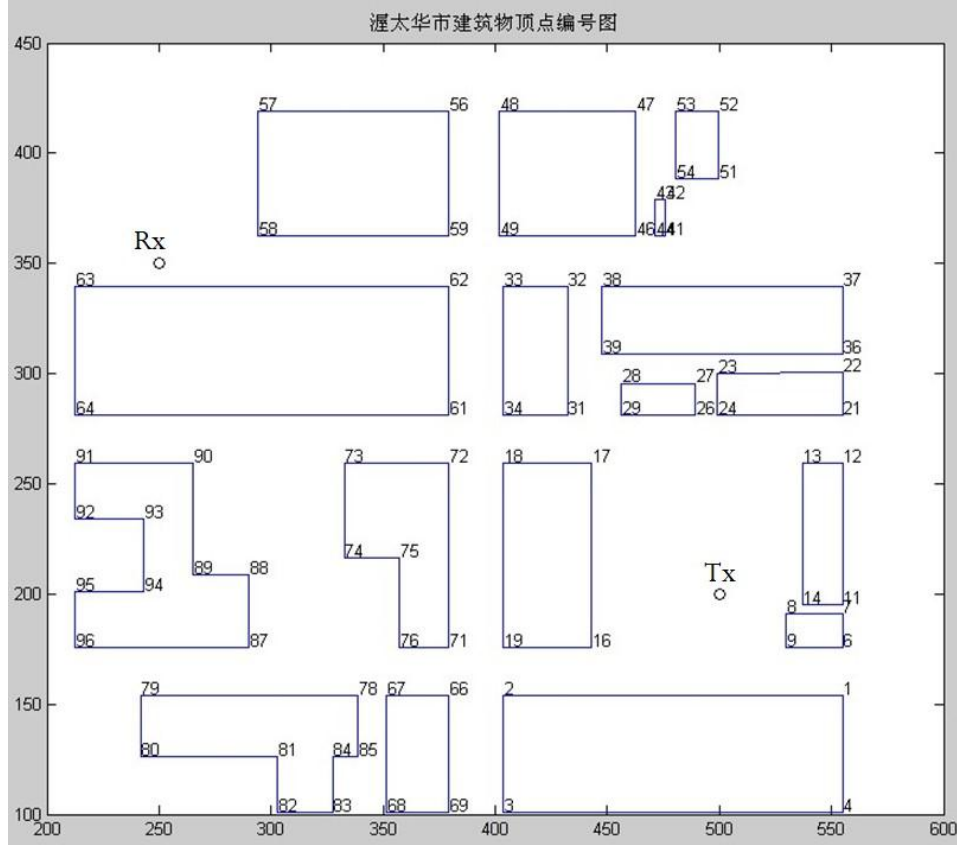


图 4.1 渥太华市建筑物顶点编号图

根据顶点的编号，再逆时针给各个墙面也编号，举例比如顶点为 56、57、58、59 的这个建筑物，北面墙面为 56，西面墙面为 57，南面墙面为 58，东面墙面为 59。另外，在计算绕射和反射混合的路径时，将墙面的编号加上 100，这样以便于区分绕射和反射。

### 4.1 测试射线法模型求解

针对问题一首先应用测试射线法模型求射线路径。由于之前分析的方法缺点，所以这里只限考虑第一种传播路径情况，即只存在反射，且反射次数不超过 7 次。

基于测试射线法模型原理以及问题一的要求，我们需要选定量化的精细程度，也就是射线条数，每条射线代表了一个发射角度区间的所有射线。射线条数越多，量化就越精细。在这里，我们选择量化的标准，是尽可能细致地反应出可能的传播路径。阅读文献发现， $0.5^\circ$  是一个比较常用的角度<sup>[3]</sup>，也就是将发射圆周等分成 720 份，也就是用 720 根射线来模拟射线跟踪的过程。

首先来看纯反射的情况（次数在 7 次以内）。根据之前的原理阐述，需要用接收半径  $R = \phi L / 2$  来判断射线是否接收到， $R$  的数量级在 1m 左右。用 MATLAB 编写程序，运行程序得到结果为 0，也就是在当前的量化精度下，没有射线可以从 Tx(500,200)到 Rx(250,350)。

但这样的结果不够直观，我们希望看看通过 7 次以内的反射，哪些射线已经很接近到达 Rx 了，最接近到达 Rx 的位置在哪。根据对渥太华市区区域二维视图进行分析，我们发现射线想要到达 Rx，首先得到达 Rx 右边的窄缝，也就是射线必须要到达 58 号边或者 62 号边，如下图所示。我们重新编写，将射线到达 58 号边或者 62 号边之后的反射情况都输出来。

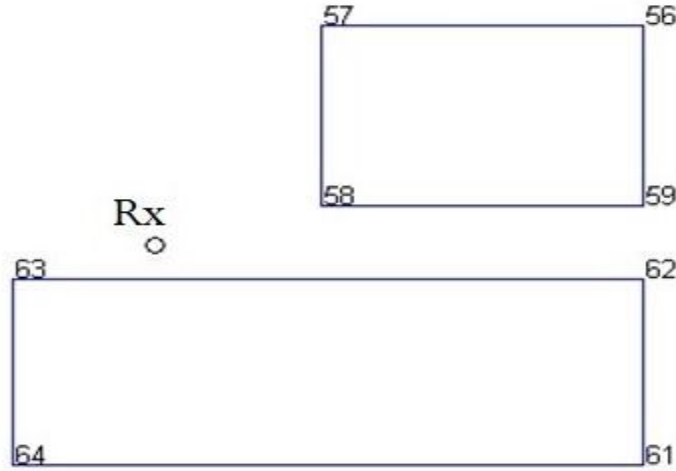


图 4.2 接收机的位置图

先解释一下射线的序号定义。如下图，初始位置  $\varphi$  是 x 轴正向，也就是  $\varphi = 0$ ，第 n 根射线的角度  $\varphi$  定义为  $\varphi_n = n * 2\pi / 720, 1 \leq n \leq 720$ 。

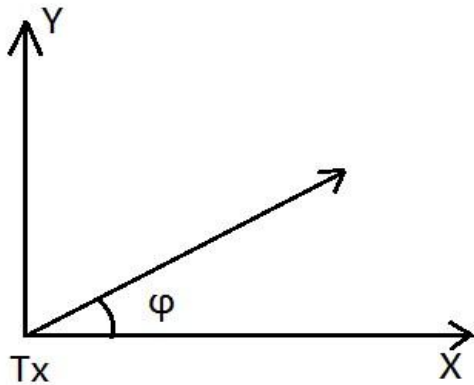


图 4.3 发射机射线角度图

重新运行程序，将所有到达 58 号边或者 62 号边之后的反射情况都列在下表中

表 4-1 测试射线法的路径展示

射线序号		第 5 次反射		第 6 次反射		第 7 次反射	
261	上次反射点	403.6484	329.4462	376.1342	362.2363	357.0155	339.4515
	这次反射点	376.1342	362.2363	357.0155	339.4515	337.8968	362.2363
	出射方向	-0.6428	-0.7660	-0.6428	0.7660	-0.6428	-0.7660
263	上次反射点	403.6484	323.4271	369.9121	362.2363	350.1056	339.4515
	这次反射点	369.9121	362.2363	350.1056	339.4515	330.2991	362.2363
	出射方向	-0.6428	-0.7660	-0.6428	0.7660	-0.6428	-0.7660

	出射方向	-0.6561   -0.7547	-0.6561   0.7547	-0.6561   -0.7547
264	上次反射点	403.6484 320.5076	366.7300 362.2363	346.5717 339.4515
	这次反射点	366.7300 362.2363	346.5717 339.4515	326.4134 362.2363
	出射方向	-0.6626   -0.7490	-0.6626   0.7490	-0.6626   -0.7490
266	上次反射点	403.6484 314.8375	360.2154 362.2363	/
	这次反射点	360.2154 362.2363	339.3370 339.4515	/
	出射方向	-0.6756   -0.7373	-0.6756   0.7373	/

上表中反射点都是(x,y)的坐标形式，出射方向是(x,y)形式的矢量。分析上表可以看到，只有 261、263、264、266 四种射线可以到达 58 或者 62 号边，并且是都是在第 5 次反射才能到达。四种射线到达之后，在窄缝里继续反射，向 Rx 靠近。看四种射线的最后一次反射点和出射方向，可以发现，261、263、264 三种射线的下一次反射点都是在 62 号边，然后出窄缝，出射方向在 Rx 的周围，之后没有反射；266 号射线在第 6 次反射的时候就出窄缝了，出射方向在 Rx 的周围，之后没有发射。也就是说，在这种(Tx,Rx)的情况下，在当前量化精度下，在 Rx 周边的通信情况比较差，只有在某些特定的位置信号比较好。

在出射圆周量化为 720 根射线的情况下，没有射线能够到达。但这也可能是量化精度不够的问题。取发射角度间隔  $\phi = 0.05^\circ$ ，提高量化精度 10 倍，也就是将发射圆周等分成 7200 份，也就用 7200 根射线来模拟射线跟踪的过程。修改并重新运行程序，结果仍然为 0，可以得出结论，在当前的量化精度下，在 7 次以内的纯反射路径，没有射线可以从 Tx(500,200)到 Rx(250,350)。

将绕射情况加入进来。因为绕射点也需要接收半径，同时每次绕射又形成类似新的发射源，这个发射源又需要进行量化，非常的繁杂，而且在进行绕射系数 D 的计算中，入射和出射角的计算也会不准确，所以下面改用镜像法模型进行计算。对于点接受模型，镜像法可以得到准确的传播路径。但是测试射线法得到的结论可以与镜像法互相验证。

## 4.2 虚拟源射线跟踪法

该方法采用点接收模型，可以同时兼顾到反射和绕射的情况，并且可以得到精确路径，但若层数太多，即迭代次数太多会造成计算时间过长，所以我们仅考虑下列收、发射机间传播路径：

- 只存在反射，且反射次数不超过 7 次；
- 只存在绕射，且绕射次数不超过 2 次；
- 一次绕射与一次、两次、三次或四次反射的任意组合；
- 两次绕射和一次反射的任意组合。

接下来，我们根据虚拟源射线追踪法模型的原理进行编程，仿真出来能够到达接收机的所有有效路径。下面几张图就是根据路径的分类展示所有可以到达的有效路径，与测试射线法结论相同，在 7 次以内的纯反射是无法到达的。

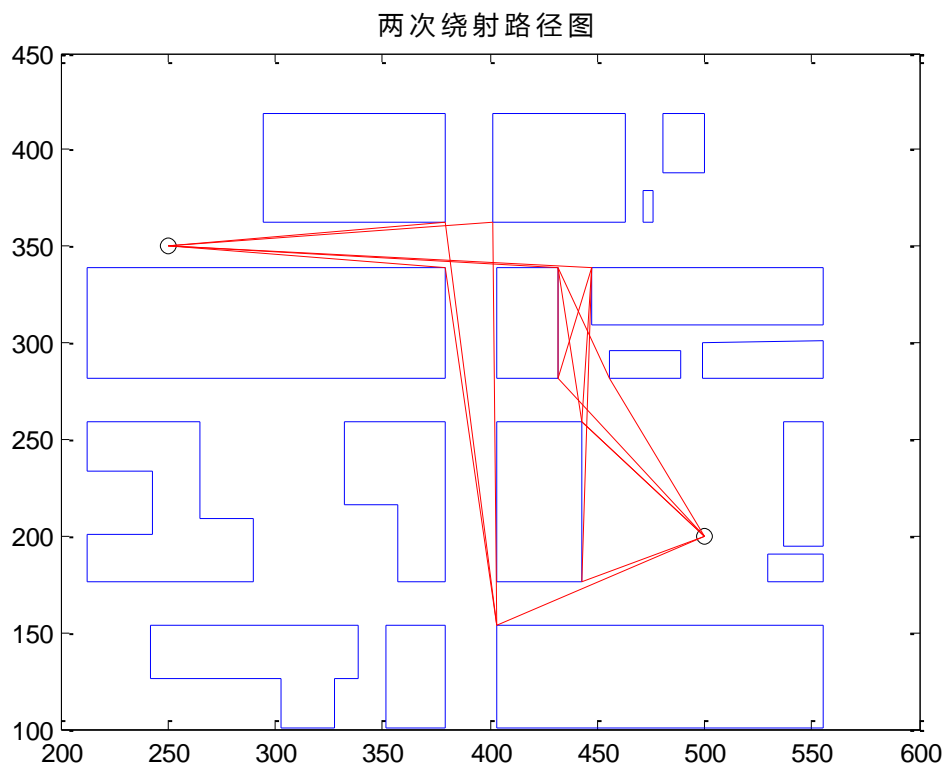


图 4.4 两次绕射路径图

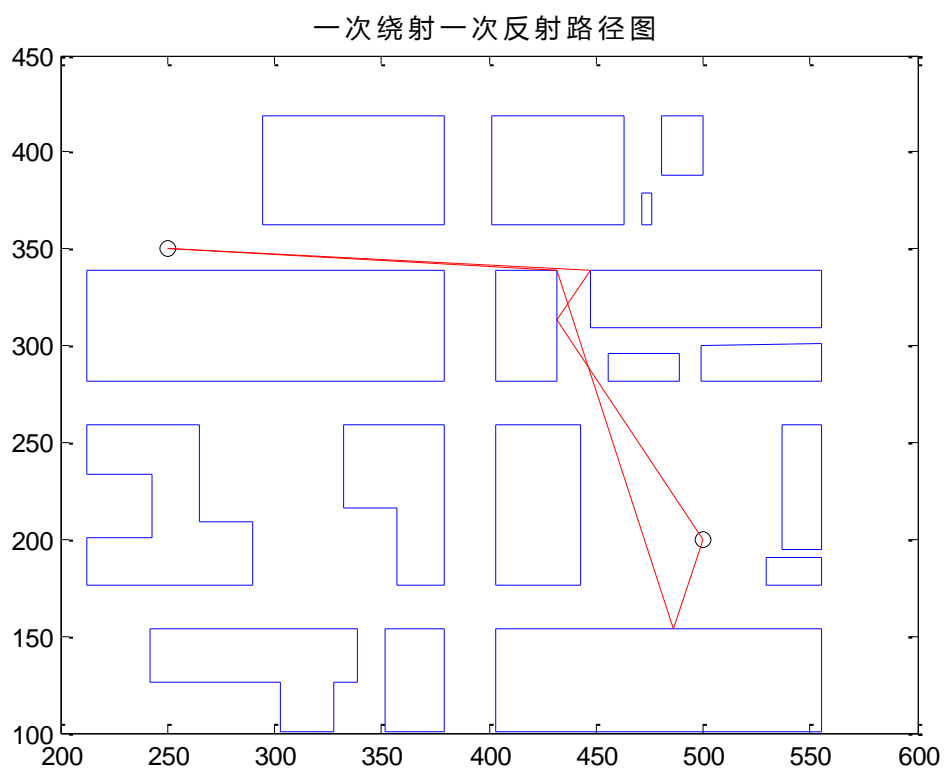


图 4.5 一次绕射一次反射路径图

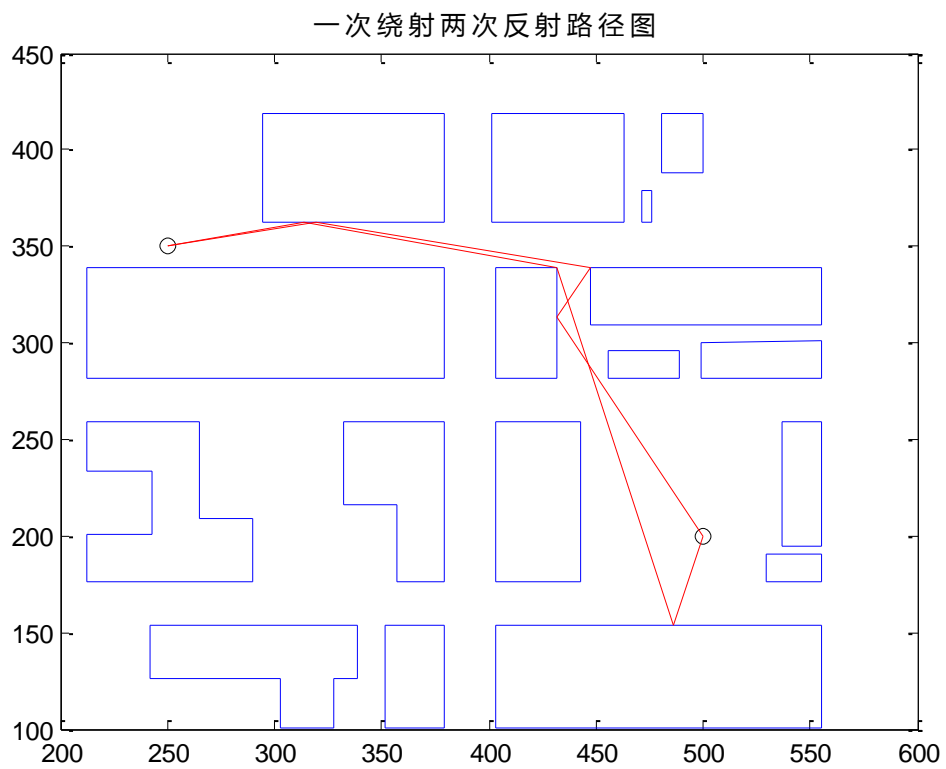


图 4.6 一次绕射两次反射路径图

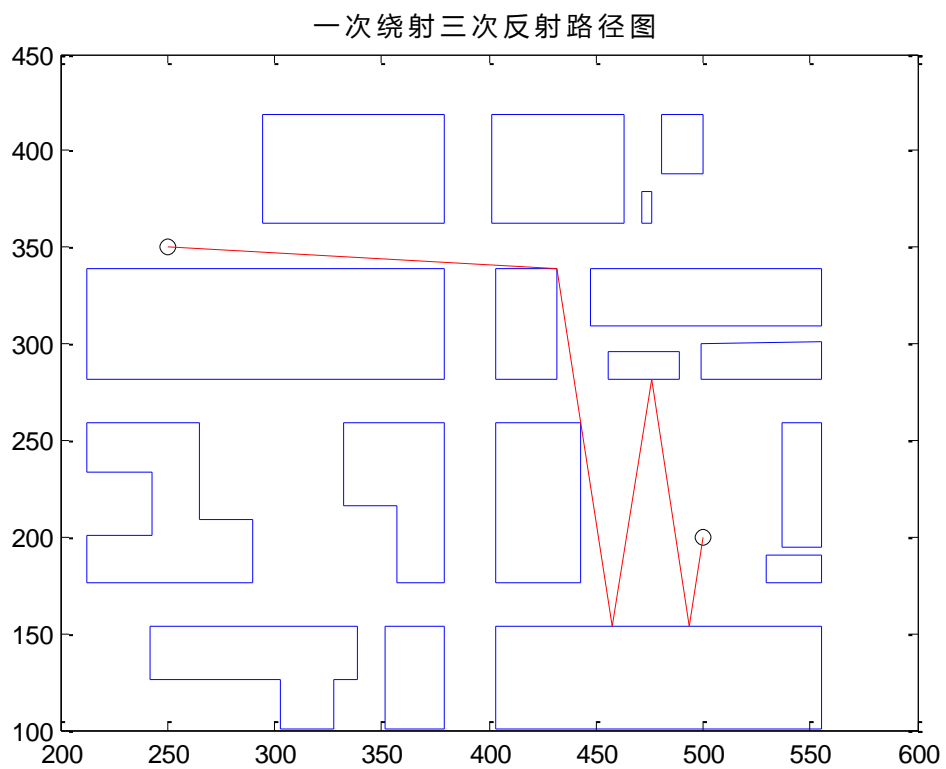


图 4.7 一次绕射三次反射路径图



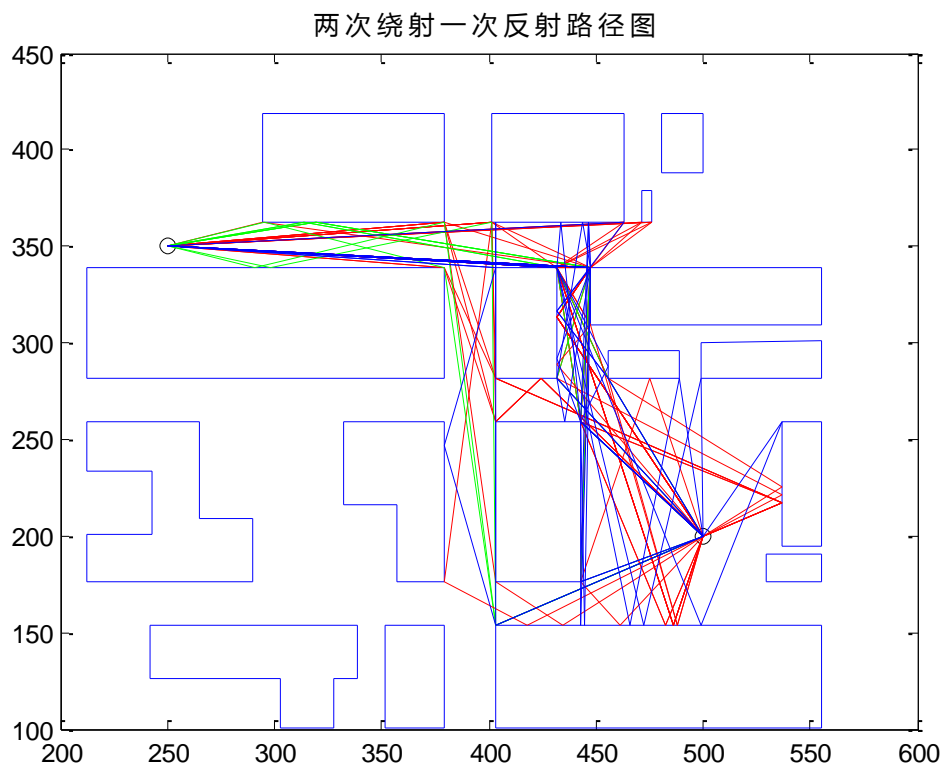


图 4.8 两次绕射一次反射路径图

从以上 5 张图可以看出，两次绕射一次反射的情况是最多的，这是因为绕射提供了方向的任意性，再加上一次反射提供了各种组合的可能性。同时在这种情况下，各种路径中从下图中的通道中通过的情况是最多的。也就是说这条通道的通信环境很大程度影响给定(Tx,Rx)之间的通信质量。

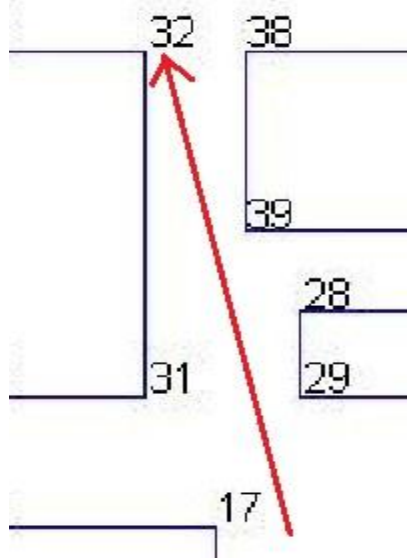


图 4.9 主要路径方向图

为了更好的展示每条有效路径，我们将每条有效路径所经过的节点一一列出。其中一次绕射三次反射可能路径最少，所以能直观的看出节点。其余各条路径所经过的节点均在三个以内，如下表所示。

表 4-2 主要路径所经过的墙面和顶点

第一节点	第二节点	第三节点		第一节点	第二节点	第三节点		第一节点	第二节点	第三节点
32	17	101		49	38	131		33	171	2
32	17	113		49	71	101		38	101	16
32	29	101		58	38	131		38	101	17
32	29	113		59	18	134		38	117	31
32	38	131		59	19	101		38	131	17
32	39	101		59	34	113		38	131	29
32	39	131		59	38	131		38	149	16
38	16	101		62	18	134		38	149	17
38	16	129		62	34	113		38	149	31
38	17	101		158	32	17		46	131	29
38	17	113		158	32	29		32	17	
38	31	113		158	38	16		32	29	
38	32	101		158	38	17		38	16	
41	32	101		158	38	31		38	17	
41	38	131		158	62	2		38	31	
44	32	101		162	49	2		49	2	
44	38	131		162	59	2		59	2	
46	32	101		32	101	13		62	2	
46	38	131		32	101	24		32	101	
49	18	134		32	101	26		38	131	
49	32	101		32	128	17		158	32	101
49	34	113		32	149	17		158	38	131
				33	149	2				

## 5. 问题二求解

如图 2.1 所示，在路径 AB 上以 50m 为间隔取 5 个位置放置发射机；在路径 CD 上以 25m 为间隔取 5 个位置放置接收机；这样有 25 种发射机—接收机组合。利用问题一中的虚拟源跟踪射线法模型的程序，计算 25 种发射机—接收机组合在各种反射绕射组合下的路径数，如下表所示。可以看出，全反射的路径数很少，所以将具体路径列在表 5-2 中。同时可以看到，有绕射的路径数是主要成分，这其中还有两次绕射的路径数又占绝大多数。

表 5-1 25 种组合的路径数对比

发射机编号	接收机编号	含有两次绕射的有效路径	至少有一次绕射的有效路径数	全部为反射的有效路径（最多三次）
1	1	58	64	0
1	2	89	96	0
1	3	56	61	0
1	4	58	61	0
1	5	43	45	0
2	1	54	58	0
2	2	85	91	0
2	3	52	56	0
2	4	54	57	0
2	5	43	45	0
3	1	119	127	2
3	2	296	311	0
3	3	182	188	1
3	4	198	207	0
3	5	195	203	0
4	1	108	133	5
4	2	179	204	5
4	3	133	153	2
4	4	129	150	1
4	5	112	133	0
5	1	56	60	0
5	2	86	89	0
5	3	54	57	0
5	4	56	57	0
5	5	41	42	0

从上表中可以看出，发射机—接收机对在 $[Tx(400, 350), Rx(450, 275)]$ 时传播路径数最多，总共有 311 条；发射机—接收机对在 $[Tx(500, 350), Rx(450, 200)]$ 时传播路径数最多，总共有 42 条。

表 5-2 25 种组合的全反射的路径

发射机编号	接收机编号	第一次反射墙编号	第二次反射墙编号	第三次反射墙编号
3	1	49	32	49
		49	38	31
3	3	61	17	34
4	1	31		
		31	17	
		31	38	31
		49	31	
		49	31	17
4	2	31		
		31	28	
		31	38	31
		49	31	
		49	31	28
4	3	31		
		49	31	
4	4	37	49	31

发射机 3 到接收机 2 之间的路径

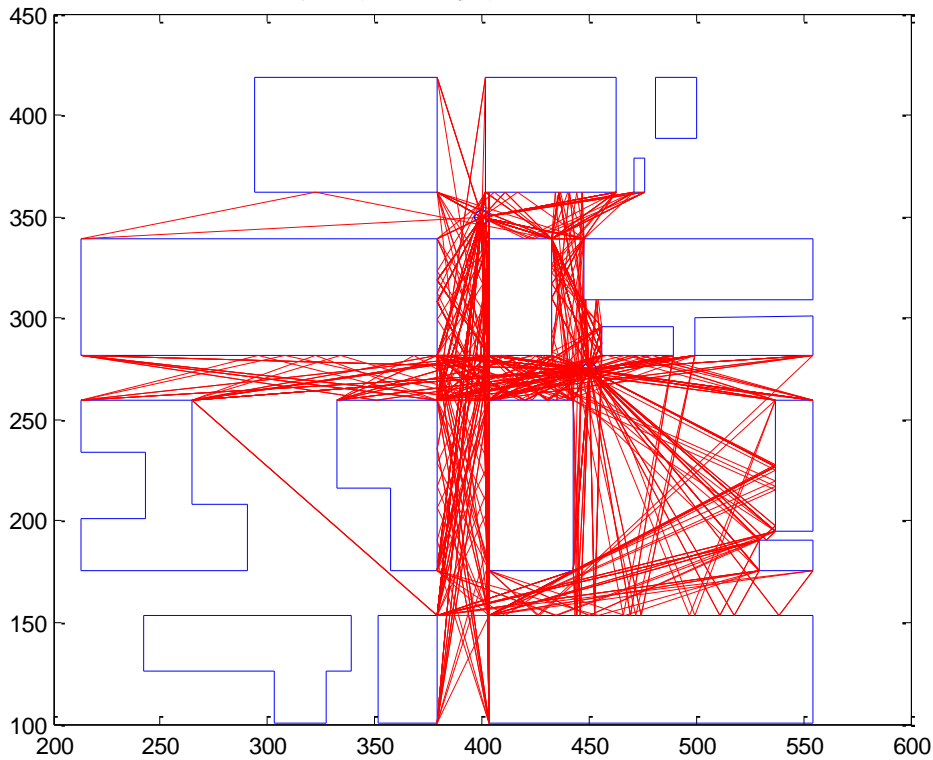


图 5-1 发射机 3 到接收机 2 之间的路径

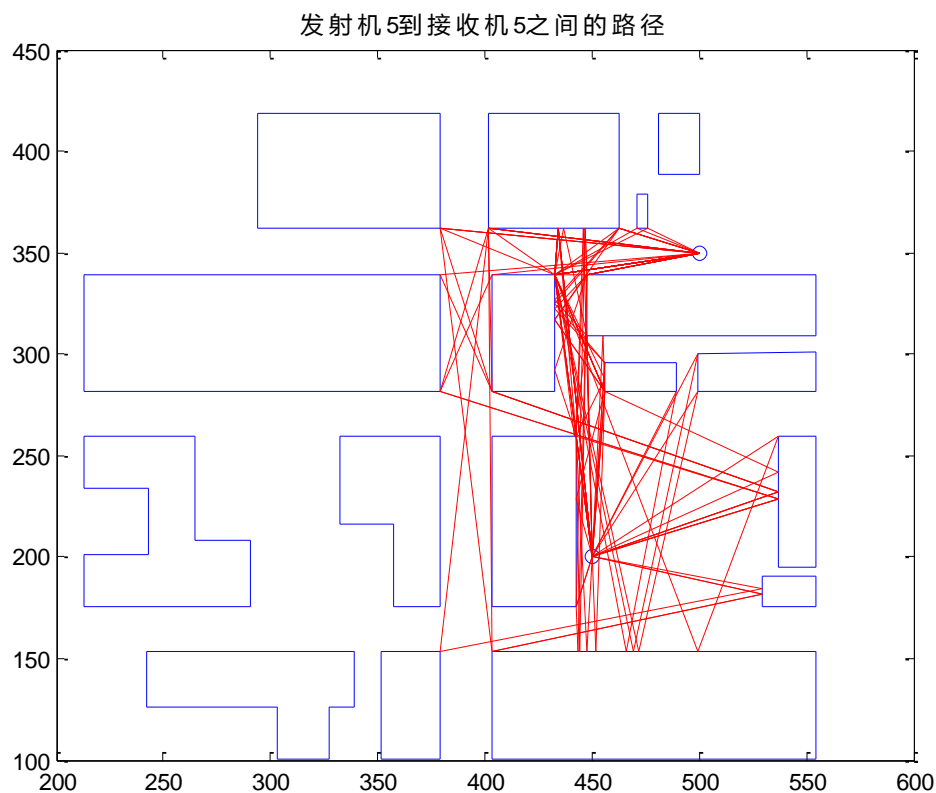


图 5-2 发射机 5 到接收机 5 之间的路径

比较图 5-1 和图 5-2，发射机 3 和接收机 2 都处在类似十字路口的位置，可视点和可视边都比较多，所以可能的路径数也很多，并且分布多个通道上，即便某个通道的通信环境不好，其他的通道也可以保证通信；而发射机 5 和接收机 5 都处在周围比较狭窄的位置，可视点和可视边都少，导致总路径数也少，并且可能的路径集中在一个通道内，这个通道的通信环境就对整体影响很大。

## 6. 问题三求解

问题三是要对问题二中所有发射机-接收机组合的路径进行规律总结。在问题二中，我们得到了发射机-接收机 25 种组合的路径数，下面我们将从这些数据中归纳出电磁波传播过程中的一些规律。另外，由可逆性知发射和接收的影响是一致的，所以发射机和接收机的环境是可以一起对比参考的。

### 规律一：含有绕射的路径在传播过程中占主要地位

从表 5-1 中，我们可以直观的看出，全部由反射传播的路径数是非常少的，最多不超过 5 条，大多数情况下都是 0 条，其相对于含有绕射的路径数基本可以忽略。从原理上分析，电磁波经过绕射点后，传播方向基本上有  $270^\circ$  的选择范围；相比之下，经过反射后的路径是绝对的，这在极大程度上限制了传播方向。所以，单从路径数上来说，在传播过程中含有绕射的路径在传播过程中占主导地位。

### 规律二：在含有绕射的路径中，含有两次绕射的路径占主要地位

对于含有绕射的路径，在表一中，可以发现含有两次绕射的路径占绝大多数。这主要也是因为经过绕射点后，传播方向的选择性很广。这样，通过不同组合的两次绕射或者两次绕射加一次反射，最终可传播到接收机。

对于不同位置的发射机和接收机的组合，为了进一步总结出其中的规律，我们对统计数据制图，用图表的方式来显示其规律性。在图 6-1 中，横坐标 1 到 5 表示 A-B 路径上自左向右的第  $n$  个发射机，每个发射机上不同颜色的柱状图表示 C-D 路径自上向下的 5 个接收机，纵坐标即表示收发之间的路径数。

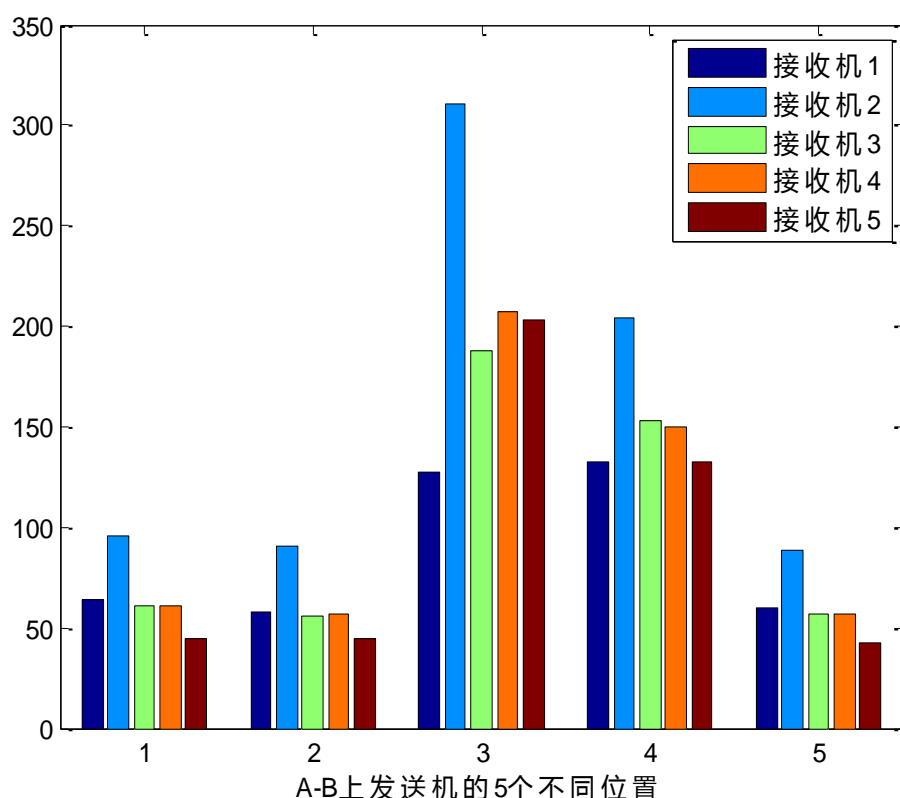


图 6-1 25 种组合的路径数柱状图

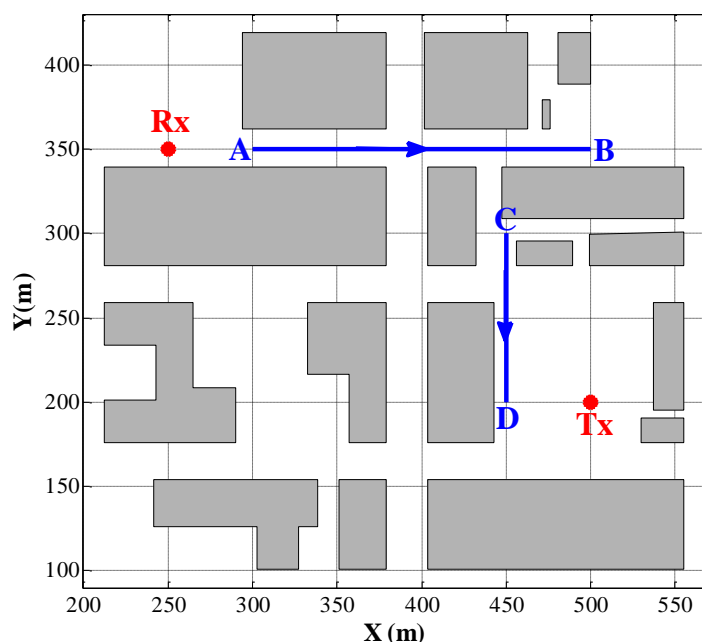


图 6-2 渥太华市区部分区域二维视图

**规律三：路口处的传播路径多于一般街道处（有效可视绕射点越多，传播路径越多）**

从图 6-1 中可以看出，发射机处于位置 3 时，可传播到接收机的路径最多，根据渥太华市地图，可以看出位置 3 处于一个十字路口处，有 4 个路口，其有效的可视绕射点最多；当发射机处于位置 4 时，可传播到接收机的路径第二多，可以发现此处发射机处于一个丁字路口边缘处，有效可视绕射点也比较多；而剩下的位置 1,2,5 处于一般街道上，传播路径都比较少。在接收端，接收机 2 处的路径数最多，其也处于路口处。由此，我们得出规律三，路口处的发射机的传播路径多于一般街道处，即有效可视绕射点越多，传播路径越多。

**规律四：同一条街道上非路口处的发射机的传播路径数与位置无关**

图 6-1 中，位置 1,2,5 三处发射机的传播路径数基本相同，这三处都不在路口，所以在相同街道且不在路口时，传播路径数与发射机的位置无关。其实，这也是因为这三处的有效可视绕射点相同所致。

**规律五：非路口处相对空旷的位置收发能力更强**

如图 6-3 所示，图中是对每个接收机和收发机上的传播路径数求和绘制的柱状图。图中可以看出，C-D 上 3,4,5 的位置要略优于 A-B 上 1,2,5 的位置，再根据渥太华市区地图（图 6-2），发现 C-D 上 3,4,5 位置比较空旷，周围可利用的反射面绕射点就比较多。所以，在忽略路口处时，相对空旷的位置收发能力更强。这样的话，也可以解释 C-D 上接收机位置 1 处虽然距离发射机更近，但其处于一个相对狭小的区域，因而接受到的路径数略小于 3,4,5 处。

**规律六：总体上距离越近收发能力更强**

从表 5-1 中可以大体看出来，传播路径数较多的情况中，发射机和接收机的距离也相对较近。而这个规律也与实际生活的情况相符。

**规律七：总体上纯反射路径越多总传播路径越多**

从表 5-1 中可以大体看出来。这也可以理论解释，因为纯反射的要求非常苛刻，而绕射的方向任意，所以能满足的纯反射路径越多，总路径同样会越多。

### 规律八：主要通道越窄总传播路径越少

从传播路径数最少的[Tx(500,350),Rx(450,200)]情况就可以反映，通过路径的选择性就会变少，从而传播路径总数会变少。

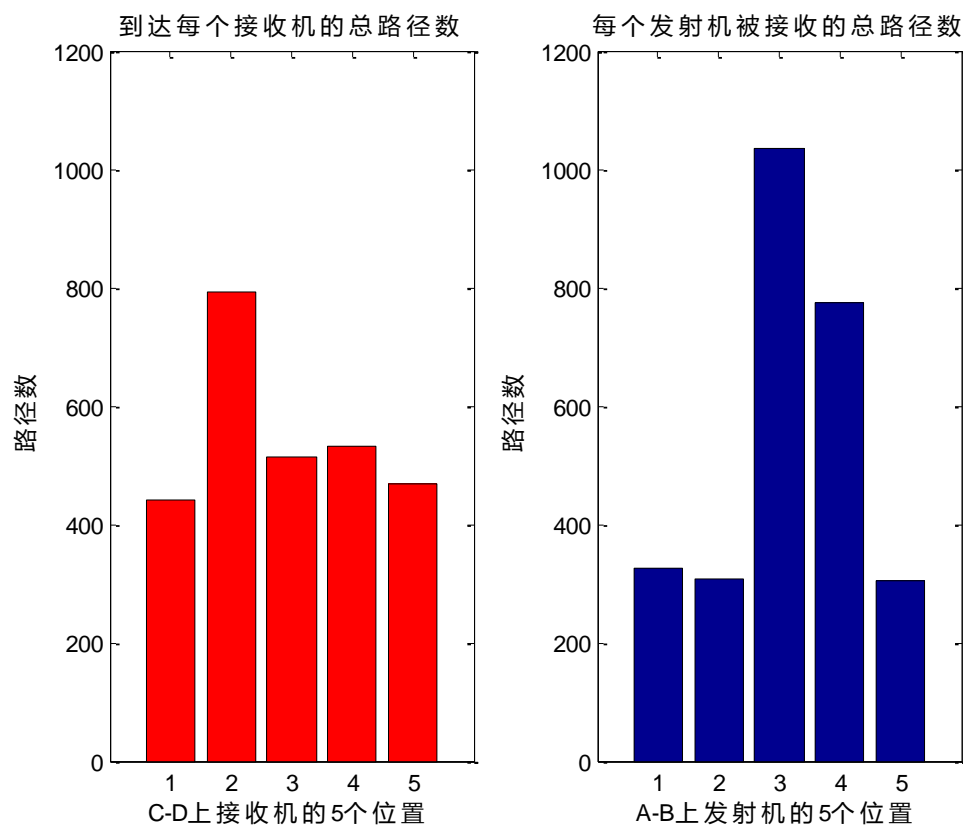


图 6-3 路径数柱状图



## 7. 问题四求解

### 7.1 绕射系数 $D$ 的定义

绕射是指在电磁波传播路径上,当电波被尺寸较大(与波长相比)的障碍物遮挡时,电磁波改变传播方向的现象。为了解决建筑物顶点(可称为劈)上的绕射问题,需要计算绕射系数  $D$ ,该系数体现出了绕射后绕射波强度  $E_d$  的衰减程度,即  $|E_d| = |E_i| \times |D|$ 。图7.1为发生在劈的绕射示意图,下面是绕射系数的计算方法。

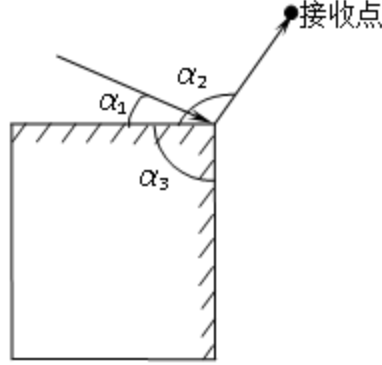


图 7.1 劈的绕射示意图

计算方法<sup>[4]</sup>:

$$D = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \cdot \left\{ \cot\left(\frac{\pi + \beta^-}{2n}\right) F(kLa^+(\beta^-)) + \cot\left(\frac{\pi - \beta^-}{2n}\right) F(kLa^-(\beta^-)) - \left[ \cot\left(\frac{\pi + \beta^+}{2n}\right) F(kLa^+(\beta^+)) + \cot\left(\frac{\pi - \beta^+}{2n}\right) F(kLa^-(\beta^+)) \right] \right\} \quad (7.1)$$

式中,  $k$  为波常数, 其计算公式为  $k = 2\pi/\lambda$  (式中  $\lambda$  为波长),  $L$  是绕射点到场点之间的距离,  $n = 2 - \alpha_3/\pi$  ( $\alpha_3$  的定义如图 7.1 所示, 单位弧度),  $F(x)$  是用来修正 Keller 非一致性解的过渡函数, 它是菲涅尔积分的一种变形, 它的定义是

$$F(x) = 2j\sqrt{x} \exp(jx) \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \exp(-j\tau^2) d\tau \quad (7.2)$$

### 7.2 绕射系数的研究

对7.1节绕射系数  $D$  的定义, 用MATLAB编写函数rsxsD(lmd,a1,a2,L)进行绕射系数的计算。其中lmd是波长  $\lambda$ , a1和a2分别为图7.1中的入射角  $\alpha_1$  和出射角  $\alpha_2$ ,  $L$  是绕射点到场点之间的距离。我们希望知道绕射系数  $D$  的大小随  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  的变化关系, 以及进行绕射系数与反射系数之间的比较, 从而知道绕射与反射能量损耗的比较。

由于入射角  $\alpha_1$  是小于  $90^\circ$  度的, 我们选择  $60^\circ$  和  $30^\circ$  为入射角的两种情况进行研究; 而出射角可在  $0^\circ$  到  $270^\circ$  之间进行变化, 离散的取其中 50 个点进行研究; 频率选择 2000Mhz, 这也是问题 5 中的样值频率, 从而波长  $\lambda$  为 0.15m;  $L$  取对于渥太华市区地图来说适中的长度 150m。

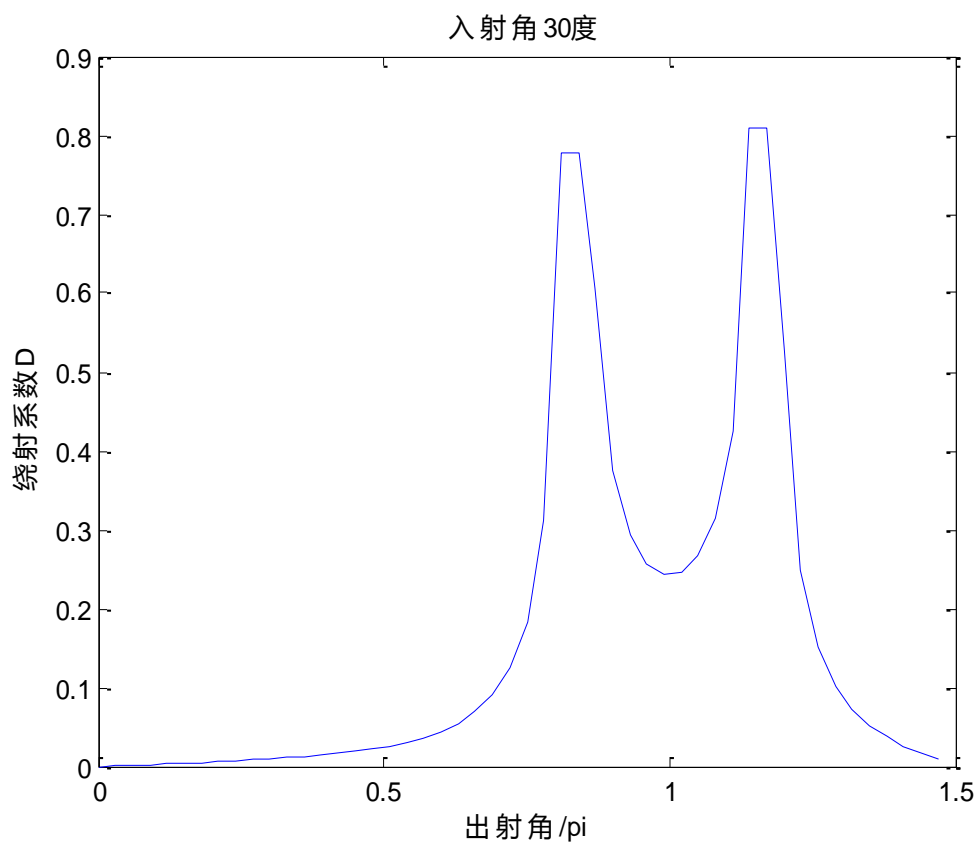


图 7.2 入射角 30 度时，绕射系数  $D$  的变化

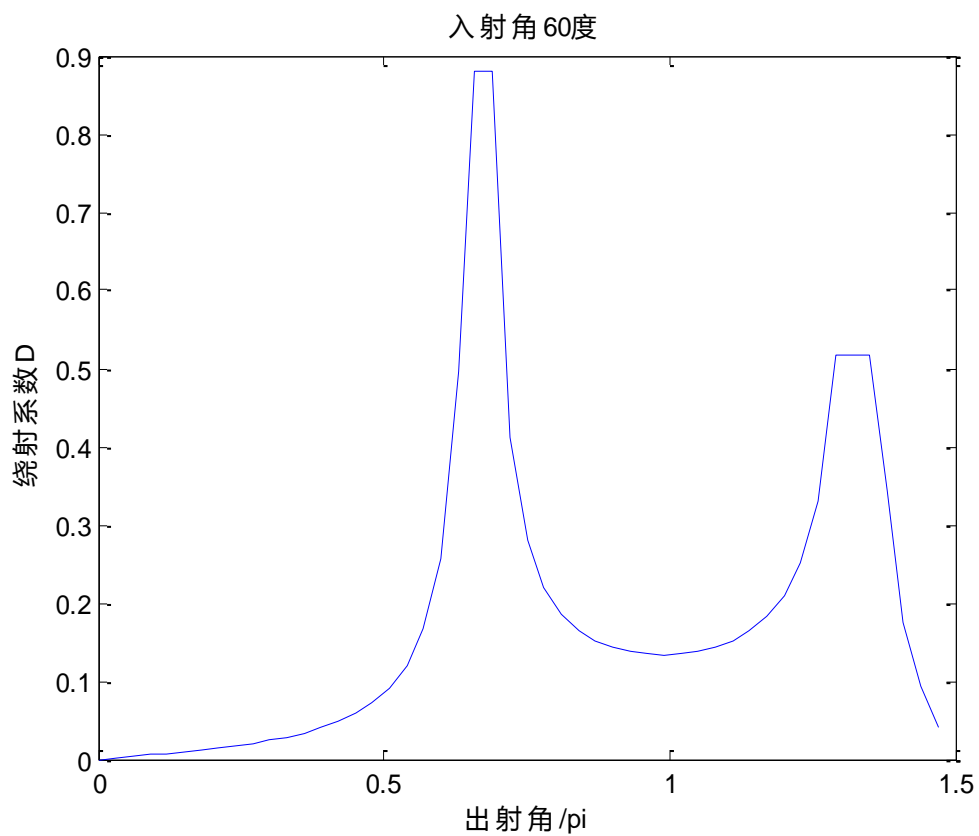


图 7.3 入射角 60 度时，绕射系数  $D$  的变化

以上两张图展现了在入射角  $30^\circ$  和  $60^\circ$  两种情况下的绕射系数  $D$  的幅值随出射角变化的图。由于在某些点通过积分算出的结果带有误差函数，无法进行取模计算，所以这些点的值用周边的点替代。可以看到在两张图中都出现了两处明显的峰值，查找具体的出射角点，可以发现当入射角为  $30^\circ$  时，两处峰值出现在出射角  $150^\circ$  和  $210^\circ$  附近；当入射角为  $60^\circ$  时，两处峰值出现在出射角  $120^\circ$  和  $240^\circ$  附近。也就是说当绕射路线与入射方向形成一条直线，或者形成类似纯反射的方向时，绕射系数  $D$  的幅值与反射系数 0.8 比较接近，其他情况下都要小于反射系数 0.8。两种情况的反射系数的幅值的平均值都在 0.2 左右。

### 7.3 多波干涉现象的研究

多波干涉形成的接收信号可以描述为

$$f(\omega, t) = \sum_{i=1}^Q A_i e^{j(\omega t + kr_i + \varphi_i)} \quad (7.3)$$

上式中， $Q$  为到达某接收点的传播途径总数； $A_i$  和  $r_i$  分别为到达接收点的第  $i$  条传播路径的信号电场强度和长度； $kr_i$  为长度为  $r_i$  的传播路径上的相位积累； $\omega = 2\pi f = 2\pi c / \lambda$  ( $c$  为光速，值为  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ )； $\varphi_i$  为每条路径上的初始随机相位，均匀分布。

由于每条路径的反射系数和绕射系数以及距离都可以确定，所以每条路径到达接收点的信号电场强度  $A_i$  都是确定的；又  $kr_i$  和  $\omega t$  在具体的时间点上确定的，只有  $\varphi_i$  是均匀分布的随机变量，所以多波干涉的接收信号可以建模为  $Q$  条已知长度为  $A_i$  的带有随机相位  $\varphi_i$  的矢量的叠加，即

$$f(\omega, t) = \sum_{i=1}^Q A_i e^{j(\varphi_i)} \quad (7.4)$$

### 7.4 对多波干涉的振幅 $|f(\omega, t)|$ 进行统计学分析

正如上节提到的将多波干涉的接收信号可以建模为  $Q$  条已知长度为  $A_i$  的带有随机相位  $\varphi_i$  的矢量的叠加，因此每条路径的接收电场强度  $A_i$  之间的大小关系就对  $|f(\omega, t)|$  的分析有很大影响，先看最简单的一次反射和一次绕射电场强度的变化可以描述为

$$E_R = E_0 R \frac{e^{-jk(s_1 + s_2)}}{s_1 + s_2} \quad (7.5)$$

$$E_D = \frac{E_0}{s_1} D \sqrt{\frac{s_1}{s_2(s_1 + s_2)}} e^{-jk(s_1 + s_2)} \quad (7.6)$$

上式中， $E_R$  为一次反射的接收电场强度， $E_D$  为一次绕射的接收电场强度， $R$  为反射系数， $D$  为绕射系数， $s_1$  和  $s_2$  分别是反射或绕射前后的距离。

由于已经给定了渥太华市区部分区域的二维视图，我们可以通过对  $s_1$  和  $s_2$

取一些特定值来比较  $E_R$  和  $E_D$  的数量级关系。约去  $E_R$  和  $E_D$  中相同的部分，即比较下面两式的数量级关系

$$\frac{R}{\sqrt{s_1 + s_2}} \quad (7.7)$$

$$\frac{D}{\sqrt{s_1 s_2}} \quad (7.8)$$

上式中， $R$  取 0.8， $D$  取平均值 0.2，根据给出的二维视图的实际距离， $s_1$  和  $s_2$  分别取 (25,25) 和 (200,200) 两种比较极限的情况。两种情况反射接收的电场强度分别是绕射的 14 和 40 倍，也就是说两种电场强度差了至少一个数量级。可以得出结论，一次绕射的强度损耗远高于一次反射，这与实际生活中的情况也是相符的。

在前面的章节中已经讨论过在给定发射机和接收机的位置的条件下，可以给出在所需讨论的四种情况下所有的路径，这其中有绕射的路径中绝大多数都是路径中含有 2 次绕射的情况。从上面的分析可以看出这样的路径最后的接收强度比一次反射要差了至少 2 个数量级。而对于全反射的情况，最多 7 次反射，也就是 0.8 的七次方为 0.2，仍然与一次反射处在一个数量级。所以我们可以将  $|f(w,t)|$  建模为  $Q_R$  条纯反射路径和  $Q_D$  条有两次绕射路径的叠加接收信号，可描述为

$$f(\omega, t) = \sum_{i=1}^{Q_R} A_{Ri} e^{j(\varphi_{Ri})} + \sum_{i=1}^{Q_D} A_{Di} e^{j(\varphi_{Di})} \quad (7.9)$$

上式中， $A_{Ri}$  和  $A_{Di}$  分别为纯反射和有绕射的接收电场强度，根据上面的分析，将两者建模为相差俩个数量级， $A_{Ri}$  取 10， $A_{Di}$  取 0.1。根据第二问的结果，5 发射机 5 接收机的 25 种情况中， $Q_D$  取一个折中的数量 100； $Q_R$  根据第二问的结果，取 0、1、2、3、4、5。

对  $|f(w,t)|$  的一阶矩进行分析。用理论公式分析的方式显然不实际，所以采用类似时间平均的方法，计算多个时刻  $|f(w,t)|$  的平均值来近似一阶矩，可描述为

$$E(|f(w,t)|) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |f(w,t_i)| \quad (7.10)$$

利用上式可以得到建模方式下各种情况的  $|f(w,t)|$  一阶矩的近似值， $N$  取 100000，如下表

表 7-1  $|f(w,t)|$  的一阶矩 1

$Q_R$	$ f(w,t) $ 的一阶矩
0	0.8810
1	10.0201
2	12.7514
3	15.6166
4	18.1757

5	20.0955
---	---------

因为  $A_{Ri}$  和  $A_{Di}$  相差俩个数量级，所以猜想有两次绕射部分对  $|f(w,t)|$  一阶矩的影响很小，所以重新建模为

$$f(\omega, t) = \sum_{i=1}^{Q_R} A_{Ri} e^{j(\varphi_{Ri})} \quad (7.11)$$

重新得到各种情况的  $|f(w,t)|$  一阶矩的近似值，N 取 100000，如下表

表 7-2  $|f(w,t)|$  的一阶矩 2

$Q_R$	$ f(w,t) $ 的一阶矩
0	0.0000
1	10.0000
2	12.7517
3	15.8101
4	17.9433
5	20.0017

通过两表的比较，除了在  $Q_R$  为 0 时，简化的模型误差较大外，其他有纯反射路径的相差在可以接受的范围内。

通过对  $|f(w,t)|$  一阶矩的建模可以得到结论：对多波干涉的振幅  $|f(w,t)|$  的一阶矩，纯反射的路径的影响占主导地位，在存在纯反射路径的情况下，有绕射的路径的影响很小，可以忽略，而纯反射的路径越多， $|f(w,t)|$  的一阶矩呈比例增大；而对不存在纯反射路径的情况， $|f(w,t)|$  的一阶矩相比存在纯反射路径的情况要小很多，也就是实际通信里信号很差的情况。

$|f(w,t)|$  的二阶矩特性与一阶矩类似，不再赘述。

不同路径到达信号的相关性：主要与各条路径的到达电场信号强度有关，相同数量级的到达场强之间的相关性较高，不同数量级或者数量级相差较多的到达场强之间相关性较小。

$|f(w,t)|$  的概率密度分布函数，选择  $Q_R$  为 5 的情况进行研究，这种情况下的多波干涉的振幅的概率分布函数如图 7.4 所示。

可以发现这种概率分布与  $\sigma=1.0$  时的瑞利分布非常接近。这也是可以理论解释的，瑞利分布是最常见的用于描述平坦衰落信号接收包络或独立多径分量接收包络统计时变特性的一种分布类型。与我们之前建模的情况完全相符，也验证了模型的正确性。同时题目中给出的 25 对收发情况，实际上都没有直达径，我们认为这种情况下的多波干涉振幅呈类似瑞利分布。而对有直达径的情况，直达径的强度比其他路径的强度要大得多。在无线信道中，莱斯分布是一种最常见的用于描述接收信号包络统计时变特性的分布类型。其中莱斯因子是反应信道质量的重要参数，在计算信道质量和链路预算、移动台移动速度以及测向性能分析等都发挥着重要的作用。信号在传输过程中由于多径效应，接收信号是直视信号（主信号）和多径信号的叠加，此时接收信号的包络服从莱斯分布。

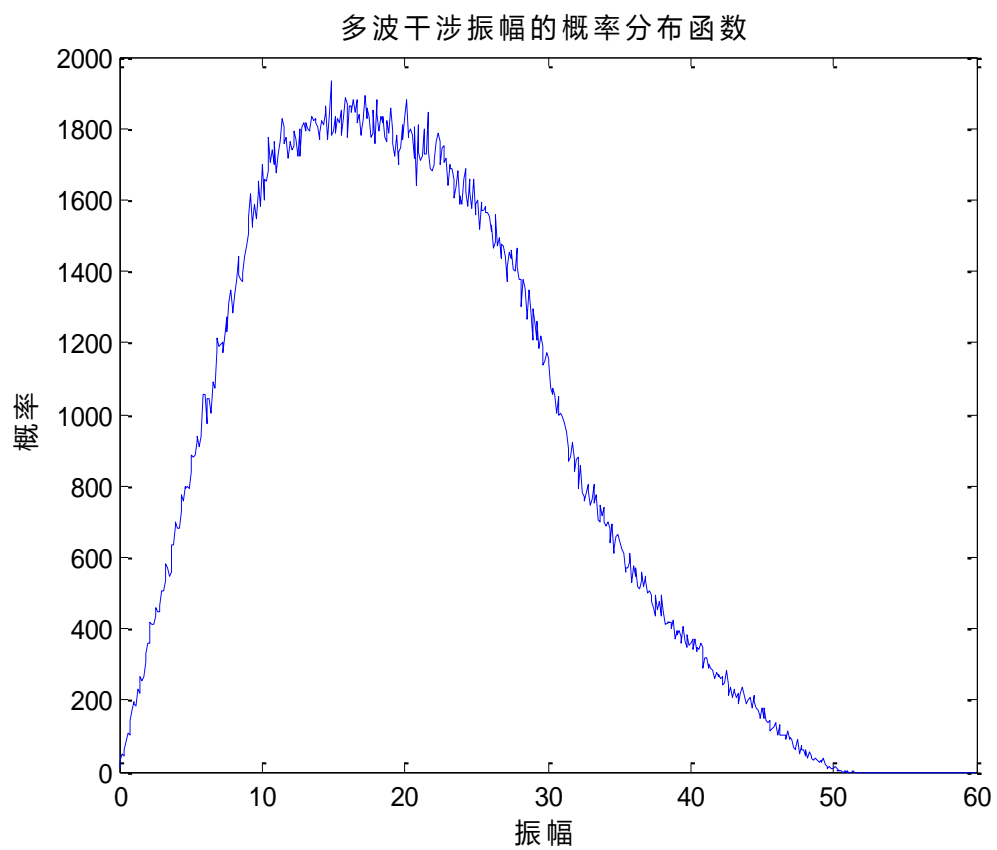


图 7.4 多波干涉振幅的概率分布函数

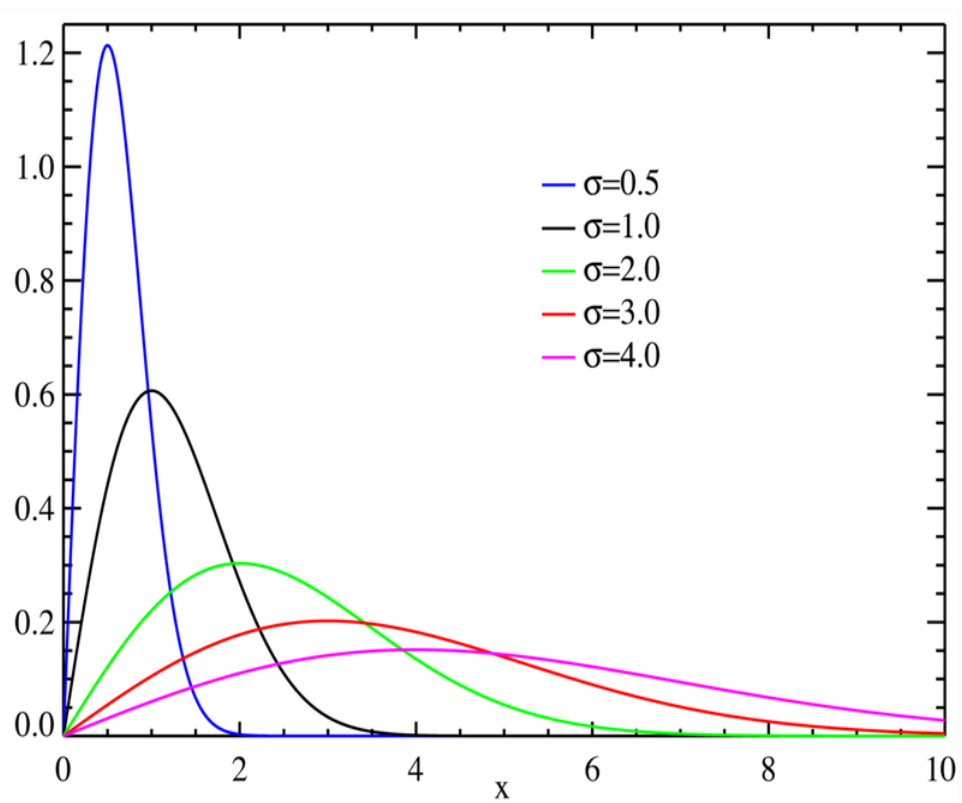


图 7.5 瑞利分布图

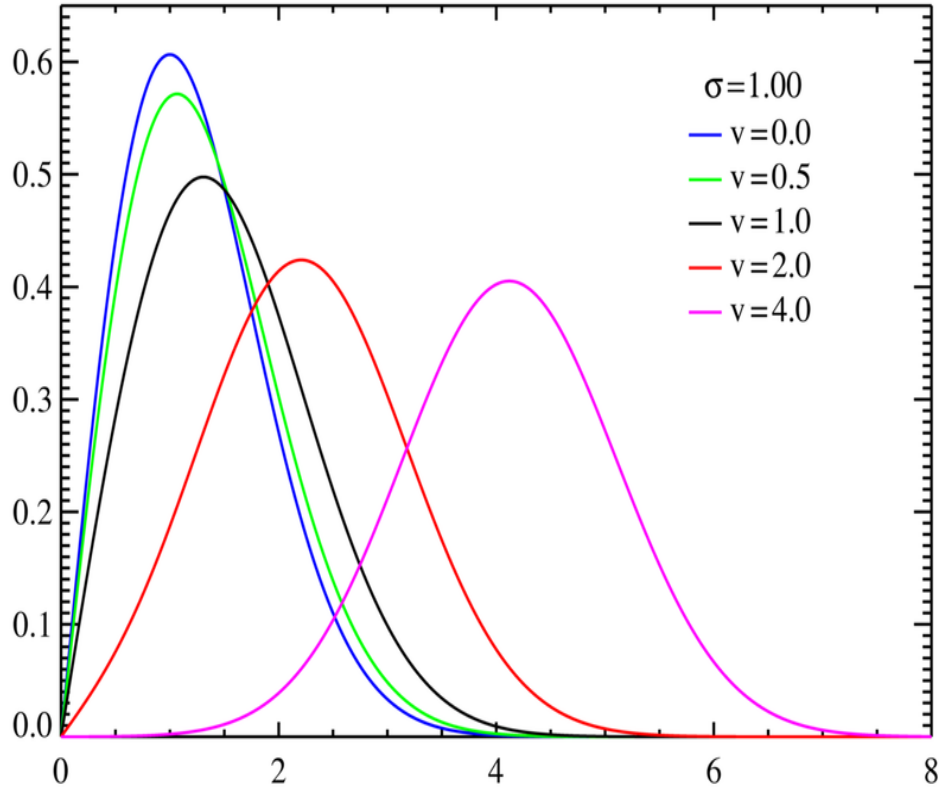


图 7.6 莱斯分布图

## 8. 问题五求解

之前已经研究过单频信号的绕射系数  $D$ , 对于宽带问题, 频率从 2000Mhz 到 2100Mhz, 对应的波长从 0.1423m 到 0.15m, 其他参数取值相同, 代入函数进行计算, 发现两者对应的绕射系数  $D$  变化很小, 可以认为在其他参数不变的情况下, 波长对绕射系数没有影响, 也就是同一路径的不同频率信号可以认为到达的接收电场强度一样。

这样, 对于从发射机同时发射一组功率相同的电波, 频率从 2000Mhz 到 2100Mhz, 要同时发射 101 个单频信号的情况, 宽带多波干涉形成的接收信号可以描述为

$$f(t) = \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^Q A_{li} e^{j(w_l t + k r_{li} + \varphi_{li})} \quad (8.1)$$

和单频的问题一样, 由于每种频率的每种路径都存在随机相位, 并且同一路径的不同频率信号可以认为到达的接收电场强度一样, 从而同一路径的宽带多波干涉形成的合成波的包络可以建模为

$$f(t) = \sum_{i=1}^{Q_R} N A_{Ri} e^{j(\varphi_{Ri})} + \sum_{i=1}^{Q_D} N A_{Di} e^{j(\varphi_{Di})} \quad (8.2)$$

这个模型与问题 4 中的单频模型只差一个频率数  $N$ , 所以合成波的包络特性与同一频率、不同路径的合成波的包络特性类似。所以对宽带多波干涉的合成波的统计特性的分析与问题 4 中的单频模型类似。

## 9. 参考文献

- [1]. M.G.Sanchez et al., Exhaustive Ray Tracing Algorithm for Microcellular Propagation Prediction Models, Electronics Letters, Vol.32: No.7, Mar.1996。
- [2]. 廖斌、赵昵丽、朱守正, 基于虚拟源树的射线跟踪算法的研究, 华东师范大学学报(自然科学版), 第三期: 103-108, 2008。
- [3]. 卞国东、黄健, 城市微小区电波传播预测, 东南大学学报, 第 26 卷第 6A 期: 14-19, 1996 年 11 月。
- [4]. R G. Kouyoumjian, P H Pathak, A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface, IEEE Proceedings, vol. 62, No. 11, pp. 1448-1461, Jun. 1974
- [5] 顾晓龙. “利用可见性概念改进基于镜像原理的射线追踪法”, 电波科学学报, Vol. 16, No, 4, pp. 16-19, 2001
- [6] C. E Yang, B. C. Wu, “A Ray-Tracing Method for Modeling Indoor Wave Propagation and Penetration,” IEEE Trans. On A. and P., Vol. 46, No. 6, PP. 907-919, June 1998.
- [7] George Liang, Henry L. Bertoni, "A New Approach to 3D Ray Tracing for Site Specific Propagation Modeling," IEEE VT. C., PP. 1113-1117, 1997.