

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校	北京邮电大学	
参赛队号	10013009	
队员姓名	1.	陶铭亮
	2.	洪亚腾
	3.	王萌

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 微蜂窝环境中无线接收信号的特性分析

摘 要：

本文综合运用了射线跟踪算法与统计学方法，分析研究了城市微蜂窝小区中的传输路径分布以及多径干涉等情况。

基本问题以渥太华市区二维抽象平面图为例，要求在只考虑反射与绕射两种机制的情况下通过射线跟踪找出收发机之间的所有传输路径。

本文分别采用量化射线跟踪和虚拟镜像源树两种射线跟踪的算法来寻找传输路径。其中，量化射线跟踪算法的准确度会受到量化精度的影响；而虚拟镜像源树法使用了射线扫描与可达矩阵的思想对传统镜像法进行了改进，实现精确射线追踪的同时提高了算法的效率。从量化射线跟踪算法的原理出发，结合接收半径的假设，找出了符合题目要求的传输路径，并对量化精度进行了详细的分析； 根据虚拟镜像源树

法，精确地找到了收发机之间所有有效路径，并对不同位置收发机的传输路径分布规律进行了分析归纳。

宽带多径干涉问题要求在由射线跟踪算法得到传输路径结果的基础上，用统计学的方法研究各传输路径的信号在接收点的干涉问题。在求解过程中，本文运用了等效基带分析模型，将发射机发射的带通信号等效成复包络信号，消除了信号载频的影响，从而简化了多径干涉信号的分析过程。

根据等效基带信号理论建立接收信号模型之后，利用统计学方法，对接收信号进行理论分析，计算得到信号包络的一二阶矩、概率分布等数字特征，同时进一步计算不同路径以及不同频率的信号互相关函数等。根据这些计算的数字特征，可以分析系统的平稳性、不同传输路径的相关性等重要特征。同时，利用我们在射线跟踪模型中已得到的路径信息，可以用数值分析的方法验证我们得到的模型的正确性。

关键词：量化追踪 镜像源树 等效基带分析 宽带多径干涉 统计分析模型

目录

1	问题重述	4
1.1	计算方法	5
2	问题假设	8
3	符号说明与名词解释	9
4	射线跟踪算法分析与改进	9
4.1	射线跟踪算法分析	9
4.2	虚拟镜像源树的深度搜索	10
4.3	根据射线扫描法判断有效虚拟镜像源	11
4.4	根据可达矩阵得到有效绕射点	12
4.5	小结	13
5	基本问题求解	13
5.1	量化射线追踪法	13
5.1.1	原理分析	13
5.1.2	量化精度分析	13
5.1.3	算法流程	15
5.2	虚拟镜像源树法	15
5.2.1	算法流程	15
5.3	问题求解结果与分析	16
5.3.1	收发机间的主要传播路径	16
5.3.2	不同收发机组合的传播路径分析	17
5.3.3	收发机传播路径的分布规律	19
6	宽带问题求解	20
6.1	宽带问题分析基础	20
6.1.1	发送信号的等效基带分析模型	20
6.1.2	多径信道建模分析	21
6.2	多波干涉问题求解	22
6.2.1	多波干涉信号分析	22
6.2.2	多波干涉问题统计分析	23
6.2.3	数值分析验证	25
6.3	宽带多波干涉问题求解	26

6.3.1	宽带多波干涉现象建模	26
6.3.2	合成波包络的相关性分析	26
7	模型评价与结论	29

1 问题重述

近年来，随着移动通信的发展，微蜂窝、微微蜂窝系统由于频谱资源利用率高而得到了广泛应用。这些系统的小区不再符合统计相似关系，给运营商在网络初期的规划带来了困难，因此使用精确的传播模型对无线传输信道进行模拟与仿真，能够为网络规划提供较为准确的理论依据，大大减少人力、时间与费用成本。

目前，无线信道传播模型有很多种，其中比较有代表性的就是射线跟踪模型 (Ray Tracing)，它被广泛应用于移动通信和个人通信环境中对无线电波传输特性的预测。射线跟踪模型按照光学方法辨认出收发发射机之间的多径信道，然后根据电波传播理论来计算每条传播路径的信号并进行相干合成。

对于城市环境下的微蜂窝小区，由于区域的高楼比较密集，小区覆盖半径小，基站天线的高度低于周围建筑，因此可以忽略电波经过屋顶绕射后再到达地面接收点的射线路径以及地面的反射路径。根据微小区中电波传播的这些特点，我们可以近似地将三维问题转化为二维问题，同时只考虑两种传播机制：反射和绕射。这种简化提高了射线跟踪模型的预测效率，同时也能够得到可以接受的预测精度。

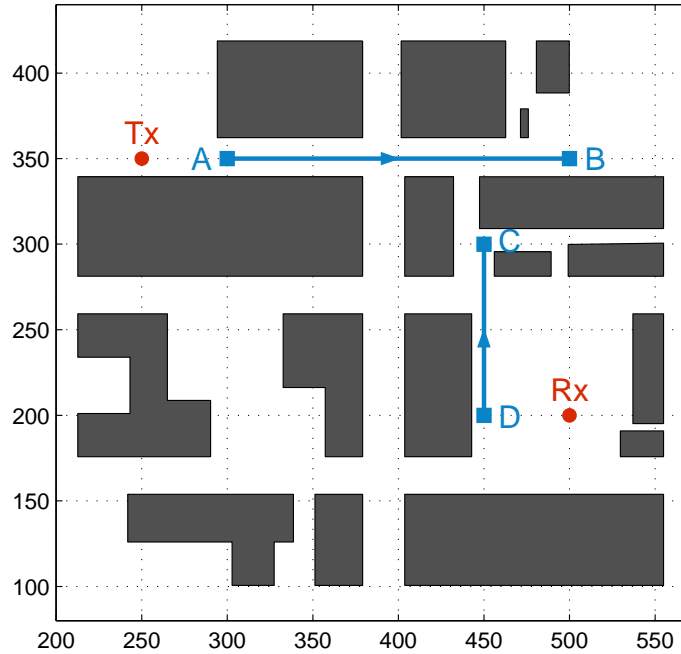


图 1: 渥太华市区部分区域二维视图。

在城市微蜂窝的二维模型中，建筑物可以被定义为“多边形”，多边形的“边”代表建筑物的表面，多边形的“顶点”则代表了建筑物的拐角。图 1 所示的二维视图是在无线信

道传播模型研究领域中最常用的二维城市地图，Whitaker 在 1988 年发表的论文中将加拿大渥太华市区的一个区域抽象成了建筑平面图，并对不同街道的信号强度进行了实地测量，我们将利用该图对射线跟踪模型进行建模与分析。

在多边形的顶点上仅能产生绕射，而在多边形的边上仅能产生反射，这些多次的反射、绕射及其组合便是收、发射机间的传播路径。二维射线跟踪模型可以通过以下两种规律分别确定反射传播路径和绕射传播路径：

- (1) 反射传播路径，产生反射时入射角 θ_i 等于反射角 θ_r ，80% 的能量被反射出来，其余能量进入新介质继续传播；
- (2) 绕射传播路径，不论入射线以任意角度入射到建筑物顶点上，绕射射线都会以任意出射角向没有建筑物覆盖的区域传播。在建筑物顶点（即劈尖）上绕射时，需要计算绕射系数，该系数体现出了绕射后绕射波强度 $|E_d|$ 的衰减程度，即，下面给出了绕射系数的计算方法。

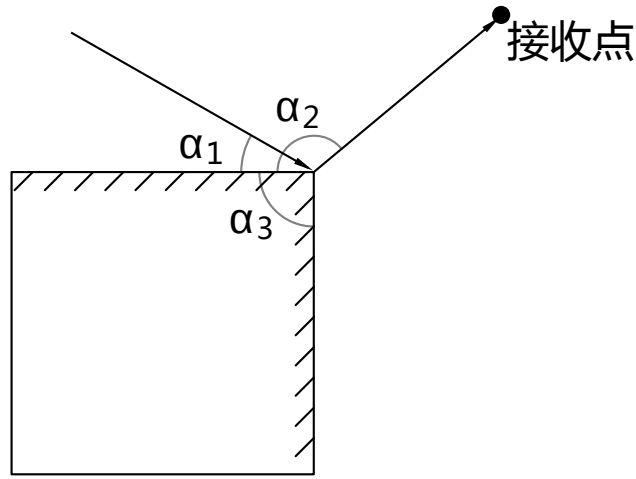


图 2: 劈的绕射示意图。

1.1 计算方法

$$D = \frac{-e^{j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \cdot \left\{ \cot\left(\frac{\pi + \beta^-}{2n}\right) F(kL\alpha^+(\beta^-)) + \cot\left(\frac{\pi - \beta^-}{2n}\right) F(kL\alpha^-(\beta^-)) - \left[\cot\left(\frac{\pi + \beta^+}{2n}\right) F(kL\alpha^+(\beta^+)) + \cot\left(\frac{\pi - \beta^+}{2n}\right) F(kL\alpha^-(\beta^+)) \right] \right\} \quad (1)$$

式中， k 为波常数，其计算公式为 $k = 2\pi/\lambda$ (式中 λ 为波长)， L 是绕射点到场点之间的距离， $n = 2 - \alpha_3/\pi$ (α_3 的定义如图 4 所示，单位弧度)， $F(x)$ 是用来修正 Keller 非一致性解的

过渡函数，它是菲涅尔积分的一种变形，它的定义是

$$F(x) = 2j\sqrt{x} \exp(jx) \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \exp(-j\tau^2) d\tau \quad (2)$$

过渡函数定义域在 $(0, +\infty)$ 上，

(1) 当 $0 \geq x \geq 0.001$ 时，过渡函数可近似写成

$$F(x) = \left(\sqrt{\pi x} - 2xe^{j\pi/4} - \frac{2}{3}x^2e^{-j\pi/4} \right) e^{j(\pi/4+x)} \quad (3)$$

(2) 当 $x \geq 10$ 时，过渡函数可近似写成

$$F(x) \approx 1 + j\frac{1}{2x} - \frac{3}{4x^2} - j\frac{15}{8x^3} + \frac{75}{16x^4} \quad (4)$$

(3) 当 $0.001 \geq x \geq 10$ 时，需要直接计算 (2) 式中的积分。由于积分的上限是 $+\infty$ ，难以用数值方法实现。可以用公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a \cdot u^2 + 2b \cdot u) du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{a}\right) \quad (5)$$

可以得出：

$$\begin{aligned} F(x) &= 2j\sqrt{x} \exp(jx) \left(\int_0^{+\infty} e^{-j\tau^2} d\tau - \int_0^{\sqrt{x}} e^{-j\tau^2} d\tau \right) \\ &= 2j\sqrt{x} \exp(jx) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-j\pi/4} - \int_0^{\sqrt{x}} e^{-j\tau^2} d\tau \right) \end{aligned} \quad (6)$$

此外，

$$\alpha^{\pm}(\beta) = 2 \cos^2 \left(\frac{2n\pi N^{\pm} - \beta}{2} \right) \quad (7)$$

其中, $\beta = \beta^{\pm} = \alpha_1 \pm \alpha_2$ (α_1 和 α_2 分别为入射角和绕射角，其定义如图 4 所示，这两个角的值以劈上任一边为参考)。

N^{\pm} 是最接近满足下列方程的整数

$$2n\pi N^{+} - \beta = \pi \quad (8)$$

$$2n\pi N^{-} - \beta = -\pi \quad (9)$$

我们的目的是根据射线跟踪模型，得到实际场景的场强分布。在后面的分析中，我们仅考虑下列收、发射机间传播路径：

- 只存在反射, 且反射次数不超过 7 次；

- 只存在绕射, 且绕射次数不超过 2 次;
- 一次绕射与一次、两次、三次或四次反射的任意组合;
- 两次绕射和一次反射的任意组合。

本论文采用射线跟踪的方法研究如下三个问题:

问题一：射线追踪确定多径信道

问题 1.1 假设电波向空间各个方向均匀发射, 根据实际情况, 跟踪确定发射机 Tx (坐标为 (500, 200)) 和接收机 Rx (坐标为 (250, 350)) 间的主要传播路径, 并可视化展示在图 1 中。

问题 1.2 在路径 AB (两点坐标分别为 (300, 350) 和 (500, 350)) 上以 50m 为间隔取 5 个位置准备放置发射机; 在路径 CD (两点分别为 (450, 300) 和 (450, 200)) 上以 25m 为间隔取 5 个位置准备放置接收机; 这样有 25 种发射机 -接收机组合。确定哪一个组合收发机间的传播路径最多, 哪一个组合最少, 并找出一定的规律。

问题二：统计分析宽带多径信道

问题 2.1 多波干涉问题

两个或两个以上的波相遇时, 在一定情况下会相互影响, 这种现象叫干涉现象。声波、光波和其他电磁波等都有此现象。对于问题一中提到的 CD 路径上的所有接收点, 多波干涉形成的接收信号可以描述为

$$f(\omega, t) = \sum_{i=1}^Q A_i e^{j(\omega t + kr_i)}$$

上式中, Q 为到达某接收点的传播途径总数; A_i 和 r_i 分别为到达接收点的第 i 条传播路径的信号电场强度和长度; kr_i 为长度为 r_i 的传播路径上的相位积累; $\omega = 2\pi f = 2\pi c/\lambda$ (c 为光速, 值为 $3 \times 10^8 m/s$)。通过统计学方法分析干涉过程中的一、二阶矩特性, 不同路径到达信号的相关性及概率密度分布函数。

问题 2.2 多频多波干涉问题

继续考虑图 1, 从发射机同时发射一组功率相同的电波, 频率从 2000Mhz 到 2100Mhz, 间隔近似 1Mhz, 这样我们总共要同时发射 101 个单频信号。每个单频信号都会形成 (4) 中提到多波干涉问题, 多个单频信号会形成宽带多波干涉现象, 我们将对这种宽带多波干涉现象进行数学建模, 并分析合成波的包络统计特性与相关性。

2 问题假设

1. 所有建筑物为理想电介质，转折角为 $\pi/2$;
2. 由于微蜂窝通信中使用的超高频无线信号与光波同属电磁波，因此假设电磁波传输过程中符合光学定律。其中，电磁波传播过程中，发生反射后能量仅有 80% 和绕射后能量符合公式 (1);
3. 忽略电波进入建筑物之后的能量传播;
4. 假设发射机的高度比建筑物低，不考虑电波经过屋顶的绕射与地面的反射，只考虑建筑物墙面的反射与绕射情况;
5. 发射机发送信号时向各个方向均匀发射，发射能量均匀分配到各条射线上;
6. 电场方向垂直于入射面，反射时有 π 的相位差 [1];
7. 假设接收机有其接收半径，此半径为电磁波波长的数量级 (2 ~ 5 倍) [2]。介绍了射线跟踪方法在三维视角下的接收原理。根据参考文献 [2]，为增加接收的效率，在实际预测时可将接收点设为一个小球，通过调节小球的半径控制接收射线总数。简化到二维平面中，当接收点在两个量化射线范围内时，认为可以接收。因此，仅把接收点看作数学意义上的点是不合适的。本文中假设接收点有个接收半径，射线经过此半径范围即认为接收成功;
8. 忽略电磁波与建筑物表面平行时的绕射，具体证明过程见附录 1;
9. 在多径信道模型中，可分辨径的数目与其信号带宽有关。对两个时延分别为 τ_1, τ_2 的径，若其时延之差远大于带宽的倒数，则称这两个径是可分辨的。否则接收端不能把它们分离出来。每个分离的多径分量相互干涉，使合成信号的幅度发生快速变化。假设题目的信号带宽足够，所有径均为可分辨的多径分量。

3 符号说明与名词解释

$S(t)$	实际信号的表达形式
$s(t)$	信号的解析表示
$S_L(t)$	基带等效信号
A	信号幅值
Q	发射接收端的路径数
L	宽带频率总数
r_i	第 i 条路径的传播长度
τ_i	信号在第 i 条路径的时延
$\Delta\varphi_i$	信号经过第 i 条路径的相移
g_i	信号经过第 i 条路径的场强损耗

4 射线跟踪算法分析与改进

4.1 射线跟踪算法分析

在微蜂窝场景下,受到微小区基站天线高度、发射功率、环境的限制,每个微小区都有自己独特的信道传输环境,因此传统的统计多径信道模型不再适用。微蜂窝场景的信道分析需要综合考虑小区范围内每一座建筑物的位置、形状、电磁传播等特性,以此进行微小区信道环境建模 (site specified)。射线跟踪算法是一种用于预测无线电波传播特性的技术,可以跟踪发射-接收对的传输信道,通过跟踪辨认出多径信道中收发之间的所有可能射线路径,从而计算场点的无线电参数,实现小区信道环境建模。由于其精确地分析周围传输环境特性得到多径传输信道,因而在微蜂窝的复杂环境传输模型分析中具有独特的优势,并得到了广泛的应用 [4]。

射线跟踪技术基于几何光学理论 (GO) [5] 以及几何散射理论 (GTD/UTD) [6, 7] 等理论,通过模拟射线传播路径来确定反射、折射和阴影等。文献 [8] 中将射线跟踪技术的算法分为了两类,分别是正向射线跟踪和反向射线跟踪。其中正向射线跟踪又分为射线划分、射线跟踪、射线接收三个主要步骤。在实际应用中,将发射机发送的信号视为在发射点为中心的三维空间内发出大量射线管束 (ray tube)。由于锥形管束的顶角极小,因此其传输路径可以用一条射线 (ray) 来模拟,从而提高跟踪效率。然而,由于正向射线跟踪算法必须进行射线划分,因此其追踪精度是正向射线跟踪的主要瓶颈。而反向射线跟踪则是从接收点出发,反向追踪每条能从源点到达场点的路径。虽然反向射线跟踪能够精确计算每条射线的路径长度、场强、时延、相位和到达角等参数,但是由于其效率低、算法复杂度高、实现困难等限制,应用不如正向射线跟踪广泛。

在正向射线跟踪的算法中,有一种利用反射的镜像原理寻找多径的方法,在这种方法

中射线的反射过程可以用树结构图来进行记录，源点对每一个建筑物面的反射都会产生一个对称位置的虚拟镜像源，而对于二次反射产生的射线，相当于每个虚拟镜像源对于每个建筑物面又产生了一个子镜像源（其中包括了发射机本身）。因此可以建立一个树结构 $T(v, e)$ ，其中除了根节点外，每个节点 v 代表了一个发射产生的镜像源。然后在整个树结构中进行搜索，寻找存在与接收机直射路径的镜像源，通过回溯即可追踪到该射线路径。这种方法不需要对发射机的发送信号进行射线量化，能够精确地找到收发端之间的所有路径。

在对本题的渥太华市区进行传输信道模型分析时，我们采用了量化射线跟踪与虚拟镜像源树两种方法，其中虚拟镜像源算法在上面提到的镜像树思路的基础上，加入了自己设计的镜像源有效性原则，同时考虑了具有 1 次或 2 次绕射的情况。下面对虚拟镜像源树算法进行具体分析。

4.2 虚拟镜像源树的深度搜索

如果将建筑物的所有 n 个墙面进行标号，则建立的虚拟镜像源树结构如下图所示，其中 T_{0,i_1,i_2,\dots,i_m} 表示发射机经过 m 次反射后的虚拟镜像源， m 次反射的反射面分别是 i_1, i_2, \dots, i_m 。第 i 层的节点表示经过 i 次反射后生成的所有虚拟镜像源，共有 $n(n-1)^{i-2}$ 个 ($i \geq 2$)，每个镜像源包含的参数有：源位置、父节点、反射面、可视射线范围等。在得到虚拟镜像树后，对其进行深度优先搜索，判断接收机是否在每个节点的可视范围内，如果接收机在某个节点的可视范围内且没有遮挡，则对该节点进行回溯，这样就得到了一条收发机之间的反射路径。

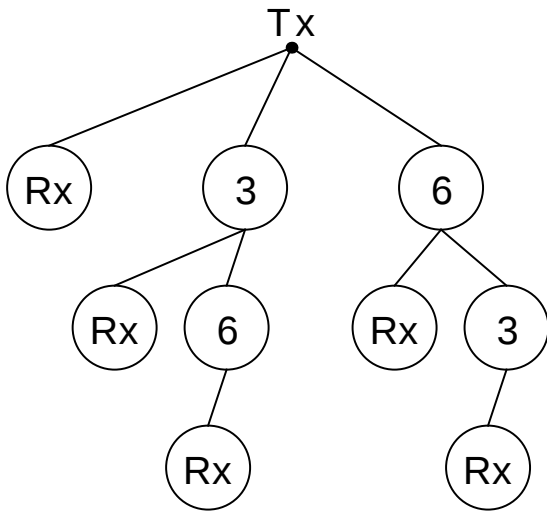


图 3: 镜像树结构图

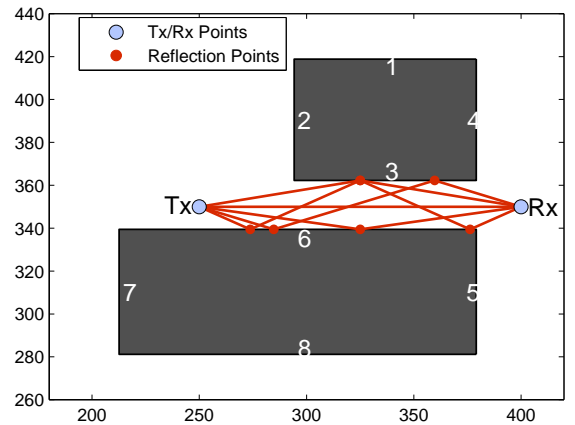


图 4: 收发路径示意

这里需要注意的是由于建筑物的位置关系以及相互遮挡的原因，这些虚拟镜像源节点并不总是存在的，有些反射面由于父节点的射线与其没有交点，因此就不会产生该反射面的子镜像节点。所以我们要对每个虚拟镜像节点的有效性进行判断 [9]。

4.3 根据射线扫描法判断有效虚拟镜像源

如下图所示, 对于虚拟镜像源的判断一共有三个步骤:

1. 判断有效反射面

如图 5 所示, 在虚拟镜像源 O 的可视范围内, 寻找所有存在的建筑物顶点, 这里只有 D 符合条件, O 的边界射线以及射向顶点 D 的射线将可视范围分为了若干集合: $[0, \theta_1]$, $[\theta_1, \theta_2]$, 在每个集合的边界找到其与反射面所有可能的交点, 比较这些交点的极径, 极径最小的表明直到扫描到下一个边界射线之前, 该反射面为有效反射面。按照该原则, 在图 5 中, 不论是集合 $[0, \theta_1]$ 段还是 $[\theta_1, \theta_2]$, AE 均为有效反射面。

2. 生成虚拟发射源

在得到有效反射面后, 根据反射的镜像原理生成子虚拟发射源 O' , 如图 6, 它是由 O 经由 AE 的反射得到的。 O' 的可视范围由有效反射面的分界射线决定, 即为 $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ 。

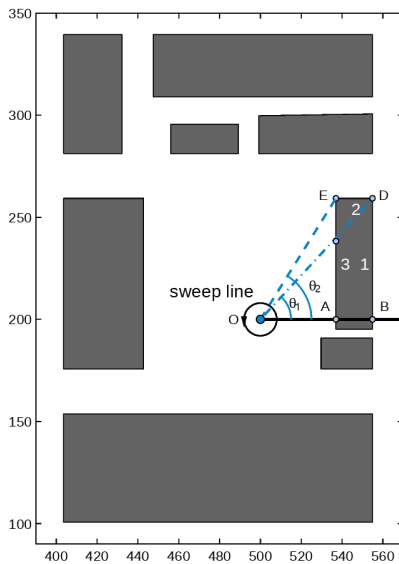


图 5: 反射面的判断

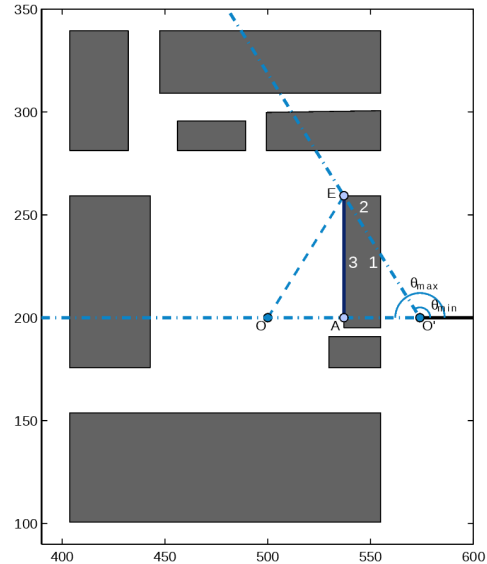


图 6: 生成虚拟发射源

3. 去除无效区域 (missing zone)

在得到 O' 虚拟源后，在分析其对应的有效反射面之前，应当将无效区域去除（图 7 中白色区域），无效区域包括反射面 AE 的虚像区一侧以及位于可视区域之外的区域。这样能够大大提高算法的搜索效率。在去除无效区域之后，对于该虚拟发射源，继续从第一步开始，判断其有效自虚拟镜像源。

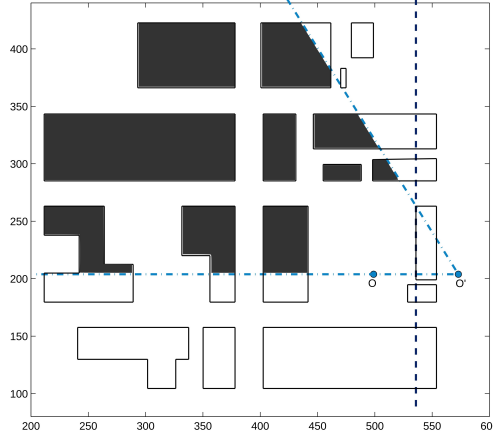


图 7: 去除 missing zone 中的反射面。

4.4 根据可达矩阵得到有效绕射点

当射线照射到建筑物的顶点上时，会发生绕射，绕射射线会以任意出射角向没有建筑物覆盖的区域传播（附录 1 证明了需要除去入射角为 0 的情况），因此我们可以将绕射点视为一个新的发射源，如果通过该绕射能够经过若干次反射到达接收机，那此绕射点即为有效绕射点。我们可以通过建立可达矩阵分析有效绕射点。

记 $W_l = w_{ij}^l, i, j = 0, 1, \dots, n+1$. 为经过 l 次反射内各顶点的可达情况，顶点集合包括了建筑物顶点以及发送接收两点，共有 $N+2$ 个元素。

$W_{ij}^l = 0$, 顶点 i 不能通过小于等于 l 次反射到达顶点 j 。

$W_{ij}^l = 1$, 顶点 i 能通过小于等于 l 次反射到达顶点 j 。

根据 5.1、5.2 的结果我们能够很容易地建立可达矩阵，之后利用该可达矩阵我们可以寻找到包含一次或两次绕射的有效路径。

包含一次绕射时，首先寻找 $0 \leq l \leq 4$ 的可达矩阵中包含元素 1 的顶点对 $(0, j)$ ，0 表示发射机， j 表示第 j 号顶点，然后查找 $0 \leq l' \leq 4-l$ 的可达矩阵中元素 $w_{j, (n+1)}$ 值是否为 1，如果成功找到 l' 可达矩阵中的元素 $w_{j, (n+1)}$ 值为 1，则 j 即为有效绕射点，发射机通过顶点 j 的绕射，可以经过 $l+l'$ 次反射到达接收机，然后进一步找到这种组合里面的所有路径情况。

包含两次绕射时，同样可以利用可达矩阵找到有效绕射点，此时需要经过两次中转，不过由于两次绕射的射线最多进行一次反射，因此所搜索的可达矩阵并不多。

4.5 小结

本章我们介绍了射线跟踪的算法，并重点分析了虚拟镜像源树法的原理以及射线扫描与可达矩阵对有效性判决的改进。本章的分析基本覆盖了问题一的解题思路，下面我们将对问题一采用量化射线跟踪与虚拟镜像源树两种方法进行求解，并根据问题一的结果进一步展开对问题二、三的研究。

5 基本问题求解

5.1 量化射线追踪法

5.1.1 原理分析

在发射机端，假设以角度为单位进行量化，得到 $2\pi/\alpha$ 条由发射机发射的射线管束，每条射线管束由管束中随机的一条射线代替，对这些射线分别进行追踪，考察他们的反射与绕射情况。

在追踪过程中，如果遇到建筑物反射时，遵循 GO 反射定律，如果遇到建筑物顶点（劈）时，按照 UTD 理论，散射射线会存在与各个方向，此时我们将该顶点看做新的发射源，重新对其进行量化射线追踪。在追踪过程中，我们需要检验问题中规定的条件，检验问题中规定的反射绕射次数限制。

5.1.2 量化精度分析

在量化射线追踪法中，量化精度与接收机的有效半径的设定会影响最终结果：量化精度越高，需要追踪的射线条数越多，计算量越大，相应的结果也会越准确；接收机的有效半径越大，接收到的射线条数也会越多。

在接收端，根据假设，接收机的接收范围为 $3 \sim 5$ 个波长。以题设的 2000MHz 为例，其波长为，

$$\lambda = c/f$$

由此，接收范围最大（精度最低）为 $5\lambda = 0.75m$

估算链路距离，取不被遮挡的最短路径作为传播的典型距离，

$$L = 400 + 50 + 50\sqrt{5} \approx 560m$$

由此可以确定量化精度 $\frac{5\lambda}{L} = 0.0013rad$ 。

经过 7 次反射，电磁波能够到达的范围如图所示，其中不同颜色代表不同次数的反射。红色代表出射线，黄色，绿色，蓝色，青色，红色，黑色以及黑色之后的红色分别代表一至七次反射线。

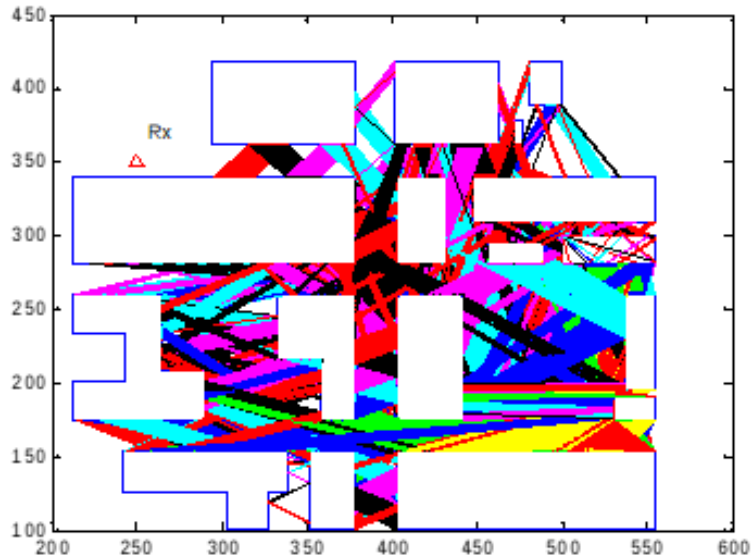


图 8: 反射光线覆盖范围。

如图可见，在 7 次反射的限定范围内，没有射线能够到达预定的接收点。

下面以反射的情况，对不同量化精度可能到达的范围进行分析。

如图 9, 10, 若精度过低，虽然能够大致反映射线可达范围，但是距离发射机越远，由于波束分散，能够达到的范围也就越稀疏。相对来说，精度较高时，其波束依然能够保持较好的紧密性质。另一方面，由于绕射仅在建筑物顶点发生，所以低精度的量化可能不能检测到全部的可能绕射点，造成路径追踪的损失。

如图 11, 12, 当设置精度为 $2\pi/360$ 时，绕射点 (554.89, 153.80), (554.89, 190.93) 无法追踪，而当设置精度为 $2\pi/3600$ 时，可以顺利追踪出所有绕射点。

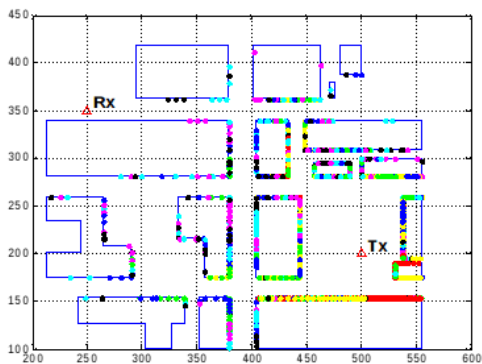


图 9: 精度 $2\pi/360$ (建筑物边上有点表明 7 次反射内可达, 否则不可达)

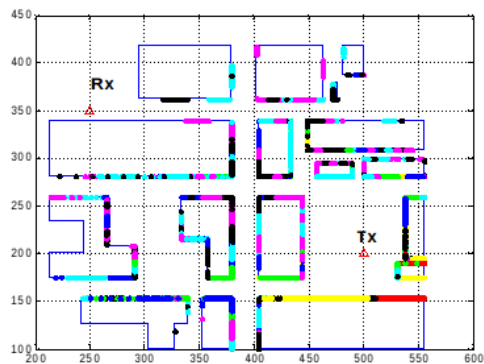


图 10: 精度 $2\pi/3600$ (建筑物边上有点表明 7 次反射内可达, 否则不可达)

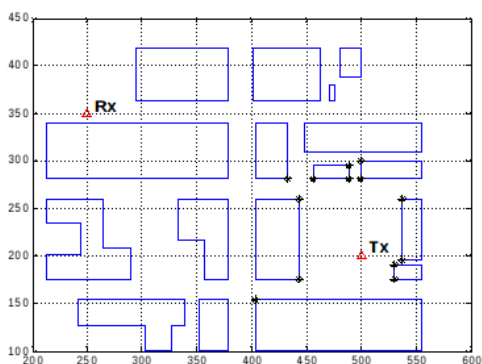


图 11: 精度 $2\pi/360$ (* 号表示量化单位下追踪到的绕射点)

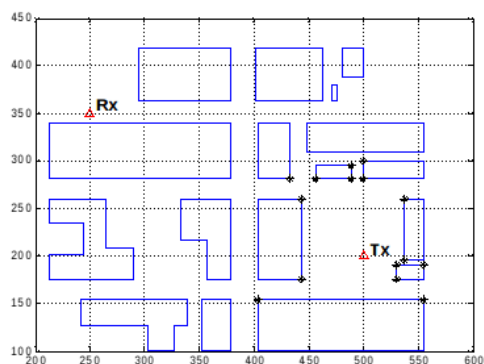


图 12: 精度 $2\pi/3600$ (* 号表示量化单位下追踪到的绕射点)

5.1.3 算法流程

根据 5.1.1 的分析, 给出算法流程图如图 13 所示。

5.2 虚拟镜像源树法

5.2.1 算法流程

在第四章中, 我们已经对该算法进行了详细的分析, 这里直接给出算法流程图如图 14 所示。

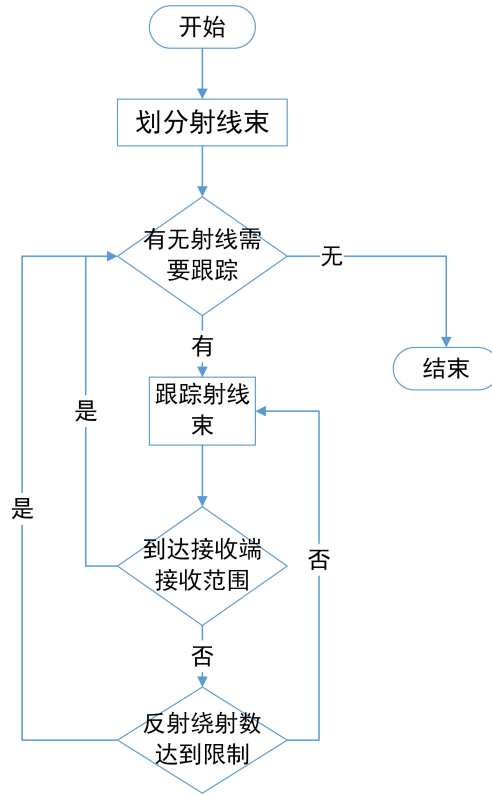


图 13: 量化射线追踪法算法流程图。

5.3 问题求解结果与分析

5.3.1 收发机间的主要传播路径

给定发射机 Tx(500, 200) 和接收机 Rx(250, 350)，利用虚拟镜像源树法得到收发机间的所有传播路径如下表：

绕射次数	无绕射	一次绕射					两次绕射		总计
反射次数	0 ~ 7	0	1	2	3	4	0	1	
可达路径条数	0	0	2	5	9	13	8	51	88

表 1: 全部传播路径数目

根据给出的场强计算公式，以最强路径的接收信号幅度作为基准，得到每条主要路径的归一化幅值，下表列出了最强的 10 幅值所对应的传播路径，包括其所经历的反射点 (R) 以及绕射点 (D)，以及其归一化的幅度值。

表中对所有的路径按照经历的绕射次数与反射次数进行了分类，可以看到 Tx 经过 7 次以内的反射无法达到接收机 Rx 处，这与前面的量化射线追踪法得到的结果相同。

为了观察方便，将经过一次绕射与两次绕射的主要传播路径分别画出如下图所示：

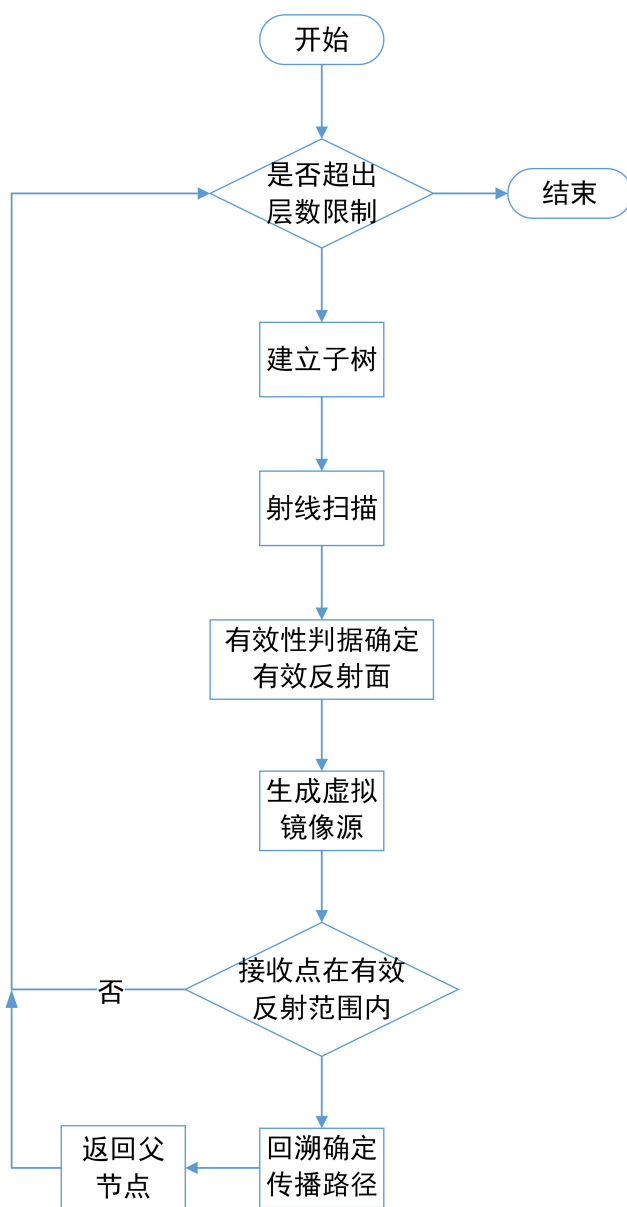


图 14: 虚拟镜像源树法算法流程图。

5.3.2 不同收发机组合的传播路径分析

在路径 AB（两点坐标分别为 (300, 350) 和 (500, 350)）上以 50m 为间隔取 5 个位置放置发射机；在路径 CD（两点分别为 (450, 300) 和 (450, 200)）上以 25m 为间隔取 5 个位置放置接收机；这样得到了 25 种发射机 - 接收机的组合。利用虚拟镜像源树法分别找出不同收发机组合下的主要传播路径，得到下表：

序号	路径点					归一化幅值
1	R(432.2, 298.9)	R(447.4, 321.2)	R(419.3, 362.2)	D(403.6, 339.5)		1.00
2	R(432.2, 298.9)	R(447.4, 321.2)	R(419.3, 362.2)	D(403.6, 339.5)	R(303.7, 362.2)	0.83
3	R(432.2, 309.4)	R(447.4, 334.0)	R(429.9, 362.2)	R(415.8, 339.5)	D(401.7, 362.2)	0.78
4	R(486.2, 153.8)	R(432.2, 334.1)	R(440.6, 362.2)	D(447.4, 339.5)		0.76
5	R(483.5, 153.8)	R(432.2, 298.0)	R(455.1, 362.2)	R(463.2, 339.5)	D(471.3, 362.2)	0.61
6	R(486.2, 153.8)	R(432.2, 334.1)	R(440.6, 362.2)	D(447.4, 339.5)	R(319.0, 362.2)	0.60
7	D(489.2, 281.2)	R(466.0, 153.8)	D(432.2, 339.5)			0.23
8	R(432.2, 313.8)	D(447.4, 339.5)	D(462.7, 362.2)			0.20
9	R(432.2, 313.8)	D(447.4, 339.5)	D(471.3, 362.2)			0.20
10	R(486.5, 153.8)	D(432.2, 339.5)				0.18

表 2: 主要传播路径 (衰减最小的 10 条路径)

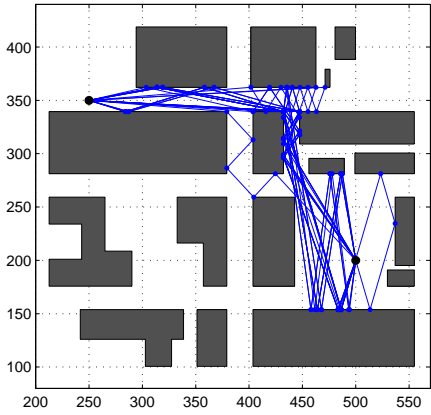


图 15: 经过一次绕射的所有路径

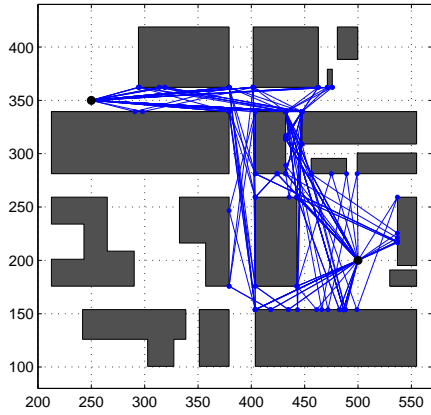


图 16: 经过两次绕射的所有路径

表 3: 主要传播路径

发射机/接收机	传播类型				合计
	直射	全反射	一次绕射	二次绕射	
(300,350/450,300)	0	2	62	72	136
(300,350/450,275)	0	1	56	110	167
(300,350/450,250)	0	0	40	71	111
(300,350/450,225)	0	0	29	68	97
(300,350/450,200)	0	0	18	53	71
(350,350/450,300)	0	3	50	66	119
(350,350/450,275)	0	2	61	103	166

接下页

发射机/接收机	传播类型				合计
	直射	全反射	一次绕射	二次绕射	
(350,350/450,250)	0	0	31	64	95
(350,350/450,225)	0	0	30	62	92
(350,350/450,200)	0	1	21	51	73
(400,350/450,300)	0	8	123	136	267
(400,350/450,275)	0	9	144	294	447
(400,350/450,250)	0	8	104	198	310
(400,350/450,225)	0	1	105	208	314
(400,350/450,200)	0	1	93	209	303
(450,350/450,300)	0	12	212	118	342
(450,350/450,275)	0	13	226	197	436
(450,350/450,250)	0	14	218	145	377
(450,350/450,225)	0	16	219	136	371
(450,350/450,200)	0	13	220	122	355
(500,350/450,300)	0	0	50	66	116
(500,350/450,275)	0	1	44	101	146
(500,350/450,250)	0	0	27	64	91
(500,350/450,225)	0	0	20	62	82
(500,350/450,200)	0	0	12	48	60

由表格可以看出，当发射机/接收机的坐标为 (400, 350)/(450,275) 时，收发机间的传播路径最多，有 447 条；当发射机/接收机的坐标为 (500, 350)/(450,200) 时，收发机间的传播路径最少，有 60 条。

5.3.3 收发机传播路径的分布规律

根据 5.2.3 得到的传播路径数据，画出统计图如图 17，并分析分布规律。

- (1) 在非视距传输时，由于收发机之间有若干建筑物阻挡，因此通过单纯通过反射到达接收机的路径很少，通过绕射到达接收机的路径占据了大部分。
- (2) 发射机与接收机之间的距离越近，传播路径数量越多；发射机与接收机之间遮挡的建筑物数量越少，传播路径数量越多。由于周围环境的影响，发射机与接收机直线距离

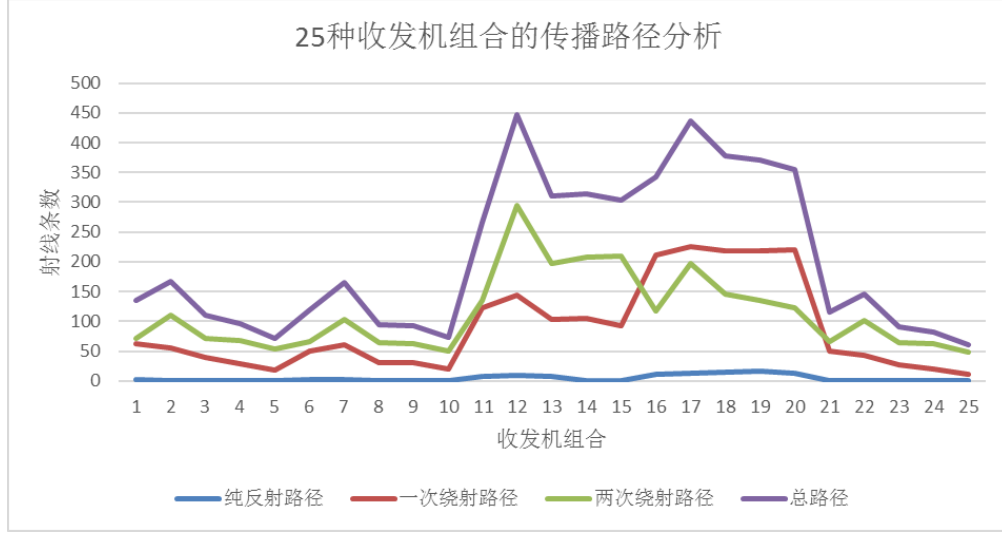


图 17: 传播路径分布图

最短时并不一定传输路径最多，而应该综合分析周围建筑环境的影响。

- (3) 固定发射机在一个位置，当接收机的位置沿路径 DC 改变时，会有一个先升后降的过程，可以看到，虽然点 C 与 AB 的距离最短，但是由于 C 周围的建筑物较多，处在了建筑物的“阴影”当中，因此传播路径数反而减少，而在 DC 中段，接收机位于道路中央，位置较为开阔，周围没有高大建筑的阴影效应，因此传播路径数最多，信号最好。如果将接收机位置固定，考察不同位置的发射机传播路径情况，能够得到类似的结论。

6 宽带问题求解

6.1 宽带问题分析基础

6.1.1 发送信号的等效基带分析模型

为了叙述的连续性，这里把第三部分的一些符号说明作进一步描述。

一般来说，发射机发射的信号是一个实带通信号，其频率响应以载波频率 f_c 为中心，带宽为 $2B$ 。发射信号的最大幅值为 A 。并且规定 $S(t)$ 表示实际的接收信号， $s(t)$ 表示接收信号的解析表达形式，具有如下关系，

$$s(t) = S(t) + j\hat{S}(t) = S_L(t)e^{j(2\pi f_c t + \phi)} \quad (10)$$

其中， $\hat{S}(t)$ 的希尔伯特变换， $S_L(t)$ 是一个复基带信号，带宽为 B_u ，功率为 P_u 。如果直接对发射机发出的带通信号进行分析，需要考虑载波频率 f_c 带来的影响，尤其是当

有不同频率信号在接受端干涉时，计算复杂度较高。因此，我们将发送信号表示为一个复指数信号的实部，即实际接收信号 $S(t)$ 可以表示为：

$$\begin{aligned} S(t) &= \text{Re}\{s(t)\} = \text{Re}\{S_L(t)e^{j2\pi f_c t}\} \\ &= \text{Re}\{S_L(t)\} \cos(2\pi f_c t) - \text{Im}\{S_L(t)\} \sin(2\pi f_c t) \\ &= S_I(t) \cos(2\pi f_c t) - S_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (11)$$

其中由于 $S_L(t)$ 的振幅就是 $S(t)$ 的振幅，因此 $S_L(t)$ 称为 $S(t)$ 的复包络或等效基带信号。 $S_L(t)$ 的相位包括了载波相位移。通过等效基带变换，信号的特性可以通过 $S_L(t)$ 体现而不再依赖载波频率的大小。在对下面两个问题的分析建模中，我们均采用等效基带分析的方法。

6.1.2 多径信道建模分析

根据问题一的求解结果，对于确定的发射-接收对，其多条传播路径已经确定。从时间维度考量，在特定时刻的接收信号，是多条路径叠加的结果。但是，由于每条路径实际传播距离不同，其传播时间也不相同。因此，接收到的信号并非同一时刻发射的信号。另一方面，由于信道的确定性，说明所有传播路径为时不变信道。可以据此采用时不变信道的统计多径信道模型进行分析。

下面以信号的解析形式进行分析。假设发射信号为

$$s(t) = S_L e^{j\omega t + \phi} \quad (12)$$

且从发射端到接收端有 Q 条传播路径，第 i 条传播路径从发射端到接收端的距离为 r_i ，则该路径的时延为

$$\tau_i = r_i / c \quad (13)$$

由时延引起的相移为 $e^{-j\omega\tau_i}$, $\omega\tau_i = kr_i$ 。

另外，假设共有 m 次反射， n 次绕射，则考虑传播路径相位积累的相位偏转为

$$\Delta\phi_i = m\pi + \sum \phi_d \quad (14)$$

那么，接收端的接收信号的表达式为

$$r(t) = \sum_{i=1}^Q g_i S_L(t) e^{j(\omega(t-\Delta t_i) + \phi + \Delta\phi_i)} \quad (15)$$

注意 $S_L(t)$ 的振幅为假设的信号振幅 A 。

6.2 多波干涉问题求解

6.2.1 多波干涉信号分析

由于通过射线跟踪方法得到的信道模型是理想化的确定性信道模型，原则上是不能使用统计学分析方法的，然而实际上，由于量化精度、绕射系数等原因，射线跟踪方法得到的多径系统也是具有随机性的。为了分析方便，我们等效地将发射信号看做一个随机过程：

$$S(t) = \text{Re}\{Ae^{j(\omega t + \Theta)}\} \quad (16)$$

其中，振幅 A 及角频率 ω 均为常数，相角 Φ 是一随机变量，它在 $[0, 2\pi]$ 上服从均匀分布。这样在下面的分析中，我们就可以利用等效基带模型，对接收信号的干涉现象进行统计学分析了。

$$s(t) = Ae^{j(\omega t + \Theta)} \quad (17)$$

假设某一的发射-接收对有 Q 条传输路径，第 i 条路径的时延为 τ_i ，则第 i 条路径的接收信号可以表示为，

$$R_i(t) = \text{Re}\{Ag_i e^{j[\omega(t-\tau_i) + \Theta + \Delta\varphi_i]}\} \quad (18)$$

总接收信号为，

$$R(t) = \sum_{i=1}^Q r_i(t) = \sum_{i=1}^Q \text{Re}\{Ag_i e^{j[\omega(t-\tau_i) + \Theta + \Delta\varphi_i]}\} = \text{Re}\{Ae^{j(\omega t + \Theta)} \sum_{i=1}^Q g_i e^{-j[\omega\tau_i - \Delta\varphi_i]}\} \quad (19)$$

其解析信号为，

$$r(t) = Ae^{j(\omega t + \Theta)} \sum_{i=1}^Q g_i e^{-j(\omega\tau_i - \Delta\varphi_i)} \quad (20)$$

基带复信号为，

$$R_L(t) = Ae^{j\Theta} \sum_{i=1}^Q g_i e^{-j(\omega\tau_i - \Delta\varphi_i)} \quad (21)$$

利用等效基带的分析模型，下面我们将具体计算接收信号包络及其一二阶矩等统计特性。

6.2.2 多波干涉问题统计分析

- 接收信号的包络：

$$\begin{aligned}
a_r(t) &= |R_L(t)| = \left| A e^{j\Theta} \cdot \sum_{i=1}^Q g_i e^{-j(\omega\tau_i - \Delta\varphi_i)} \right| \\
&= \left| (A \cos \Theta + j A \sin \Theta) \cdot \left(\sum_{i=1}^Q g_i \cos(\omega\tau_i - \Delta\varphi_i) - j \sum_{i=1}^Q g_i \sin(\omega\tau_i - \Delta\varphi_i) \right) \right| \\
&= \left| A \cos \Theta \cdot \sum_{i=1}^Q g_i \cos(\omega\tau_i - \Delta\varphi_i) + A \sin \Theta \cdot \sum_{i=1}^Q g_i \sin(\omega\tau_i - \Delta\varphi_i) + \right. \\
&\quad \left. + j \left[A \sin \Theta \cdot \sum_{i=1}^Q g_i \cos(\omega\tau_i - \Delta\varphi_i) - A \cos \Theta \cdot \sum_{i=1}^Q g_i \sin(\omega\tau_i - \Delta\varphi_i) \right] \right| \\
&= \left| A \sum_i g_i \cos(\Theta - \omega\tau_i + \Delta\varphi_i) + j A \sum_i g_i \sin(\Theta - \omega\tau_i + \Delta\varphi_i) \right| \\
&= A \cdot \sqrt{\sum_i g_i^2}
\end{aligned}$$

因此接收信号包络的总增益是每个路径幅值增益的算术平方根。下面我们计算接收信号的统计特性，以此分析多波干涉的振幅情况。

- 接收信号的一阶矩：

$$\begin{aligned}
E[R(t)] &= E \left[\text{Re} \left(A e^{j(\omega t + \Theta)} \cdot \sum_{i=1}^Q g_i e^{-j(\omega\tau_i - \Delta\varphi_i)} \right) \right] \\
&= E \left[\text{Re} (A \cdot \cos(\omega t + \Theta) + j A \cdot \sin(\omega t + \Theta)) \cdot \left(\sum_{i=1}^Q g_i \cos(\omega\tau_i - \Delta\varphi_i) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - j \sum_{i=1}^Q g_i \sin(\omega\tau_i - \Delta\varphi_i) \right) \right] \\
&= E \left[A \cos(\omega t + \Theta) \cdot \sum_{i=1}^Q g_i \cos(\omega\tau_i - \Delta\varphi_i) + A \sin(\omega t + \Theta) \cdot \sum_{i=1}^Q g_i \sin(\omega\tau_i - \Delta\varphi_i) \right] \\
&= E \left[A \cdot \sum_{i=1}^Q g_i \cos(\omega\tau_i + \Delta\varphi_i - \Theta) \right]
\end{aligned}$$

- 接收信号的二阶矩：

$$\begin{aligned}
E[R(s)R(t)] &= E[\text{Re}\{Ae^{j(ws+\Theta)} \sum_{i=1}^Q g_i e^{-j(w\tau_i - \Delta\varphi_i)}\} \cdot \text{Re}\{Ae^{j(wt+\Theta)} \sum_{m=1}^Q g_m e^{-j(w\tau_m - \Delta\varphi_m)}\}]] \\
&= A^2 E[(\sum_{i=1}^Q g_i \cos(w\tau_i - \Delta\varphi_i) \cos(ws + \Theta) + \sum_{m=1}^Q g_m \sin(w\tau_m - \Delta\varphi_m) \cos(ws + \Theta)) \times \\
&\quad (\sum_{i=1}^Q g_i \cos(w\tau_i - \Delta\varphi_i) \cos(wt + \Theta) + \sum_{m=1}^Q g_m \sin(w\tau_m - \Delta\varphi_m) \cos(wt + \Theta))] \\
&= A^2 E[(\sum_{i=1}^Q g_i \cos[w(s - \tau_i) + \Delta\varphi_i + \Theta] \cdot (\sum_{m=1}^Q g_m \cos[w(t - \tau_m) + \Delta\varphi_m + \Theta]) \\
&\quad (\sum_{i=1}^Q g_i \cos(w\tau_i - \Delta\varphi_i) \cos(wt + \Theta) + \sum_{m=1}^Q g_m \sin(w\tau_m - \Delta\varphi_m) \cos(wt + \Theta))] \\
&= A^2 \sum_{i=1}^Q \sum_{m=1}^Q g_i g_m E[\frac{1}{2}(\cos[w(s - \tau_i) + \Delta\varphi_i + \Theta + w(t - \tau_m) + \Delta\varphi_m + \Theta] \\
&\quad + \cos[w(s - \tau_i) + \Delta\varphi_i - w(t - \tau_m) - \Delta\varphi_m])] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Q \sum_{m=1}^Q g_i g_m \cos[w(s - t) + \Delta\varphi_i + w(\tau_m - \tau_i) - \Delta\varphi_m] \quad (22)
\end{aligned}$$

不同路径到达信号的互相关函数：

$$\begin{aligned}
R_{mn}(s, t) &= E[R_m(s)R_n(t)] \\
&= E[\text{Re}\{Ae^{j(ws+\Theta)} g_m e^{-j(w\tau_m - \varphi_m)}\} \times \text{Re}\{Ae^{j(wt+\Theta)} g_n e^{-j(w\tau_n - \varphi_n)}\}] \\
&= A^2 g_m g_n E[\cos(w(s - \tau_m) + \varphi_m + \Theta) \cos(w(t - \tau_n) + \varphi_n + \Theta)] \\
&= \frac{1}{2} A^2 g_m g_n \cos(w(s - t) + w(\tau_n - \tau_m) + \varphi_m - \varphi_n) \\
&= R_{mn}(s - t) \quad (23)
\end{aligned}$$

可以看出 $R_n(t)$ 与 $R_m(t)$ 的互相关函数只与 $(s - t)$ 有关，因此不同路径的接收信号是联合平稳的。

以上我们得到了接收信号的一、二阶矩以及相关性，并且证明了接收信号的平稳性，上述结果能够完全表征接收信号的分布特性，下面我们将会进一步求得单径接收信号的概率密度函数 $f_R(x, t)$ 。

$f_R(s, t)$ 的特征函数为，

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_R(x, t) dx \quad (24)$$

同时,

$$\varphi(u) = E(e^{iuR(t)}) = E[e^{iuA \cos(wt+\Theta)}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iuA \cos(wt+\Theta)} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{e^{iux}}{\sqrt{A^2 - x^2}} dx \quad (25)$$

因此,

$$f_R(x, t) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}} \quad |x| < A \quad (26)$$

6.2.3 数值分析验证

通过解决基本问题, 我们已经得到了任意位置的收发机间的传输路径, 同时根据反射、绕射与直射公式, 能够计算出每条路径的幅值增益与相位偏移, 因此我们能够用数值分析的方法, 验证上面统计分析的结果。我们生成一个正弦发射信号, 通过传输路径信息计算出接收端的归一化信号, 如上图所示。图中可见, 当发射信号为正弦波时, 接收端虽然经过多个路径不同的时延、相位偏转, 但是接收到的信号仍然保持发射信号的形式, 为一正弦波, 其包络增益约为 0.36。根据我们上面的理论分析, 包络增益为各条路径幅值增益的算术平方根, 经计算, 为 0.37, 两种分析结果保持一致。同时由波形可以看出, 接收信号的一阶矩为 0, 同样符合理论分析的结果。

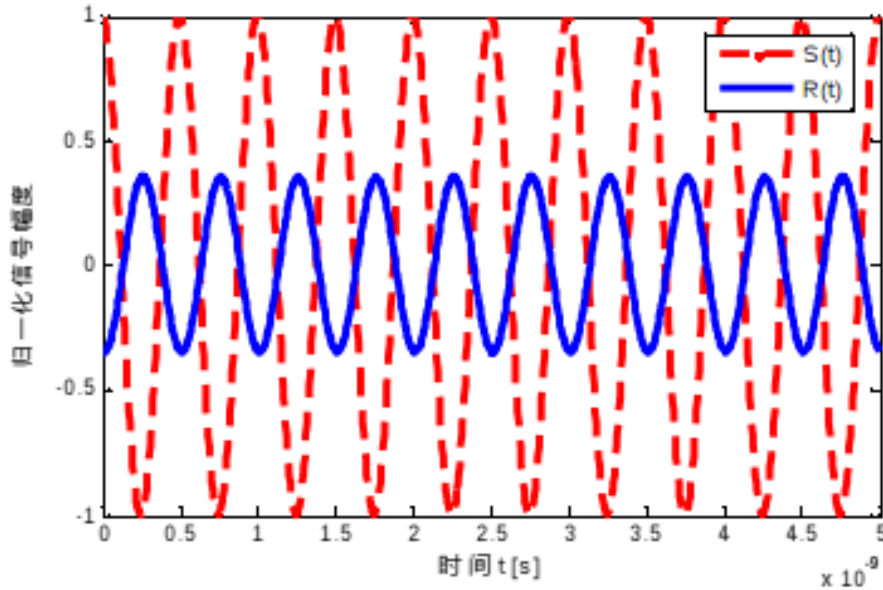


图 18: 多径样本数值比较。

6.3 宽带多波干涉问题求解

6.3.1 宽带多波干涉现象建模

在该问题中，从发射机向接收机同时发射一组功率相同、频率从 2000MHz-2100MHz、间隔 1MHz 的电波，共有 $L=101$ 个单频信号，即发射信号可以表示为，

$$S(t) = \text{Re}\left\{\sum_{l=1}^L A_l e^{j(w_l t + \Theta_l)}\right\} \quad (27)$$

其中 Θ_l 是独立同分布的随机变量，服从 $[0, 2\pi]$ 区间的均匀分布。在接收端，多个单频信号会形成宽带多径现象，得到接收信号：

$$R(t) = \text{Re}\left\{\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^Q A_l e^{j(w_l t + \Theta_l)} g_{i,l}(t) e^{-j(w_l \tau_i(t) - \varphi_{i,l}(t))}\right\} \quad (28)$$

其中 $g_{i,l}(t), \tau_i(t), \varphi_{i,l}$ 分别是第 i 条路径的总信号增益、传播时延以及相位差，三者均为确定的常数，其中信号增益与相位差由于绕射的原因，会与信号频率有关，而传播时延 $\tau_i(t) = \tau_i = r_i/c$ ，与信号频率无关。所以接收信号可以表示为，

$$R(t) = \text{Re}\left\{\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^Q A_l e^{j(w_l t + \Theta_l)} g_{i,l} e^{-j(w_l \tau_i - \varphi_{i,l})}\right\} \quad (29)$$

它是不同频率、不同路径的信号干涉而成的合成波，它的解析信号为，

$$r(t) = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^Q A_l e^{j(w_l t + \Theta_l)} g_{i,l} e^{-j(w_l \tau_i - \varphi_{i,l})} \quad (30)$$

信号 $R(t)$ 的复包络为，

$$R_L(t) = r(t) e^{-j w_l t} = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^Q A_l e^{j \Theta_l} g_{i,l} e^{-j(w_l \tau_i - \varphi_{i,l})} \quad (31)$$

6.3.2 合成波包络的相关性分析

合成波的包络为，

$$a(t) = |R_L(t)| = \left| \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^Q A_l e^{j \Theta_l} g_{i,l} e^{-j(w_l \tau_i - \varphi_{i,l})} \right| \quad (32)$$

这是一个二重积分，包含频率与路径两个分量。我们将固定其中一个，研究包络的统计特性。

- 固定频率 ω_l

考察频率同为 w_l 的信号包络,

$$\begin{aligned}
a_l(t) &= \left| \sum_{i=1}^Q A_l e^{j\Theta_l} g_{i,l} e^{-j(w_l \tau_i - \varphi_{i,l})} \right| \\
&= \left| A_l e^{j\Theta_l} \sum_{i=1}^Q g_{i,l} e^{-j(w_l \tau_i - \varphi_{i,l})} \right| \\
&= \left| (A_l \cos \Theta_l + j A_l \sin \Theta_l) \times \left[\sum_{i=1}^Q g_{i,l} \cos(w_l \tau_i - \varphi_{i,l}) - j \sum_{i=1}^Q g_{i,l} \sin(w_l \tau_i - \varphi_{i,l}) \right] \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^Q A_l \cos \Theta_l g_{i,l} \cos(w_l \tau_i - \varphi_{i,l}) + \sum_{i=1}^Q A_l \sin \Theta_l g_{i,l} \sin(w_l \tau_i - \varphi_{i,l}) + \right. \\
&\quad \left. j \left[\sum_{i=1}^Q A_l \sin \Theta_l g_{i,l} \cos(w_l \tau_i - \varphi_{i,l}) - \sum_{i=1}^Q A_l \cos \Theta_l g_{i,l} \sin(w_l \tau_i - \varphi_{i,l}) \right] \right| \\
&= \sqrt{A_l^2 \sum_{i=1}^Q g_{i,l}^2 \cos^2[\Theta_l - (w_l \tau_i - \varphi_{i,l})] + A_l^2 \sum_{i=1}^Q g_{i,l}^2 \sin^2[\Theta_l - (w_l \tau_i - \varphi_{i,l})]} \\
&= A_l \sqrt{\sum_{i=1}^Q g_{i,l}^2}
\end{aligned} \tag{33}$$

因此多径干涉后信号的包络增益是各条路径增益的算术平方根。

不同路径信号之间的相关函数为,

$$\begin{aligned}
R_{mn}(s, t) &= E[R_m(s) R_n(t)] \\
&= E[\text{Re}\{A_l e^{j(w_l s + \Theta_l)} g_{m,l} e^{-j(w_l \tau_m - \varphi_{m,l})}\} \cdot \text{Re}\{A_l e^{j(w_l t + \Theta_l)} g_{n,l} e^{-j(w_l \tau_n - \varphi_{n,l})}\}] \\
&= A_l^2 g_{m,l} g_{n,l} E[\cos(w_l(s - \tau_m) + \varphi_{m,l} + \Theta_l) \cos(w_l(t - \tau_n) + \varphi_{n,l} + \Theta_l)] \\
&= \frac{1}{2} A_l^2 g_{m,l} g_{n,l} \cos(w_l(s - t) + w_l(\tau_n - \tau_m) + \varphi_{m,l} - \varphi_{n,l}) \\
&= R_{mn}(s - t)
\end{aligned} \tag{34}$$

通过相关函数可以看出, 不同路径的信号是联合平稳的。

互协方差函数为,

$$\begin{aligned}
C_{mn}(s, t) &= R_{mn}(s, t) - E[R_m(s)]E[R_n(t)] \\
&= R_{mn}(s - t) - E[\text{Re}\{A_l e^{j(w_l s + \Theta_l)} g_{m,l} e^{-j(w_l \tau_m - \varphi_{m,l})}\}]. \\
&\quad E[\text{Re}\{A_l e^{j(w_l t + \Theta_l)} g_{n,l} e^{-j(w_l \tau_n - \varphi_{n,l})}\}] \\
&= R_{mn}(s - t) - E[A_l g_{m,l} \cos(w_l(s - \tau_m) + \varphi_{m,l} + \Theta_l)] \cdot \\
&\quad E[A_l g_{n,l} \cos(w_l(t - \tau_n) + \varphi_{n,l} + \Theta_l)] \\
&= R_{mn}(s - t)
\end{aligned} \tag{35}$$

由上面的计算可以看到, 每条径接收信号一阶矩为 0。不同路径之间的互协方差一般不为 0, 说明不同路径的信号具有相关性。考虑到信道的平稳性, 当两条路径的相位差满足 $(\omega_i \tau_n - \varphi_{n,l}) - (\omega_l \tau_m - \varphi_{m,l}) = \frac{2n+1}{2}\pi$ 时, 在这两条路径上的接收信号不相关。

- 固定一条传输路径 i

考察第 i 条路径上不同频率干涉后的信号包络,

$$\begin{aligned}
a_i(t) &= \left| \sum_{l=1}^L A_l e^{j\Theta_l} g_{i,l} e^{-j(w_l \tau_i - \varphi_{i,l})} \right| \\
&= \left| e^{-jw_l \tau_i} \sum_{i=1}^Q g_{i,l} A_l e^{j(\Theta_l + \varphi_{i,l})} \right| \\
&= \sqrt{\sum_{l=1}^L A_l^2 g_{i,l}^2} = A_l \sqrt{\sum_{l=1}^L g_{i,l}^2}
\end{aligned} \tag{36}$$

由于各频率的发射电波功率相同, 因此同一路径不同频率干涉信号的包络增益是该条路径对于不同频率信号增益的算术平方根。

不同频率信号之间的相关函数为,

$$\begin{aligned}
R_{pq}(s, t) &= E[R_m(s)R_n(t)] \\
&= E[\text{Re}\{A_p e^{j(w_p s + \Theta_p)} g_{i,p} e^{-j(w_p \tau_i - \varphi_{i,p})}\} \cdot \text{Re}\{A_q e^{j(w_q t + \Theta_q)} g_{i,q} e^{-j(w_q \tau_i - \varphi_{i,q})}\}] \\
&= A_p A_q g_{i,p} g_{i,q} E[\cos(w_p(s - \tau_i) + \varphi_{i,p} + \Theta_p) \cos(w_q(t - \tau_i) + \varphi_{i,q} + \Theta_q)] \\
&= \frac{1}{2} A_p A_q g_{i,p} g_{i,q} \{E[\cos(w_p(s - \tau_i) + \varphi_{i,p} + w_q(t - \tau_i) + \varphi_{i,q} + \Theta_{p+q})] + \\
&\quad E[\cos(w_p(s - \tau_i) + \varphi_{i,p} - w_q(t - \tau_i) - \varphi_{i,q} + \Theta_{p-q})]\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{37}$$

这里首先计算了 Θ_{p+q} 与 Θ_{p-q} 复合概率密度分布，带入上式得到相关函数值为 0，并且，不同频率信号的互协方差函数为，

$$\begin{aligned}
C_{mn}(s, t) &= R_{pq}(s, t) - E[R_p(s)]E[R_q(t)] \\
&= R_{pq}(s - t) - E[A_p g_{i,p} \cos(w_p(s - \tau_i) + \varphi_{i,p} + \Theta_p)] \times \\
&\quad E[A_q g_{i,q} \cos(w_q(t - \tau_i) + \varphi_{i,q} + \Theta_q)] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{38}$$

因此同一路径中不同频率信号之间不相关。

7 模型评价与结论

本文从射线跟踪的应用出发，建立了两种射线跟踪模型：量化射线跟踪法和虚拟镜像源树法。其中，量化射线跟踪模型虽然能够比较高效的实现发射机信号在空间中的射线跟踪，但是会产生一定的误差，并且量化精度越低，产生的误差越大。而我们根据正向射线跟踪改进得到的虚拟镜像源树模型，在保证射线跟踪效率的基础上，能够实现无穷精度的射线跟踪，极大的提高了射线跟踪的性能。

根据射线跟踪的结果，可以得到发射-接收对之间确定的传输路径。如果对多个发射-接收对进行射线跟踪与分析，则可以由此得到接收信号的统计规律，实现对信道的统计建模分析。另一方面，从通信系统的原理出发，对多径信道的信号进行等效基带表示，并以此建立接收信号的数学模型，从而得到理论上接收信号的统计特性。本文从这两方面出发，以理论分析为依据，射线跟踪结果得到的统计模型为验证，给出了多波干涉信号幅值、宽带多波干涉包络等的统计特性。此外，还根据要求的问题对同一频率、不同路径信号之间，同一路径、不同频率信号之间的相关性进行了深入的理论上的分析求解，完成了题目的要求。

结合上面的叙述，本文主要有两方面的贡献。首先，提出的虚拟镜像源树算法能够有效的实现射线的跟踪，为这一领域的研究人员提供了一种解决方案；其次，对射线跟踪结果的应用，本文从理论上深入的分析了城市微小区实际场景中接收信号、多波干涉现象、信号包络等统计特性，不仅为此类问题提供了理论分析的方法，而且得到了一些实际有效的结论，供相关领域人员参考。同时，目前的模型还有一些需要改进的地方，比如对相关性的数值分析、干涉和信号的概率密度等。射线追踪模型作为确定的信道模型，一般来说是得不到统计信道结论的，因此在射线追踪模型中引入统计随机性是一个较为开放性的问题，这也是我们以后改进模型的方向。

参考文献

- [1] 甘桂蓉, 罗开基; 界面处反射电磁波与入射电磁波的相位关系; 江西师范大学学报, 2006 年 11 月第 30 卷第 6 期.
- [2] Chang-Fa Yang, Boau-Cheng Wu, and Chuen-Jyi Ko; A Ray-Tracing Method for Modeling Indoor Wave Propagation and Penetration; IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 46, NO.6, JUNE 1998.
- [3] Andrea Goldsmith, 无线通信 (杨鸿文等译); 人民邮电出版社; 2011 年 5 月.
- [4] Georgia E. Athanasiadou, Andrew R. Nix, and Joseph P. McGeehan; A Microcellular Ray-Tracing Propagation Model and Evaluation of its Narrow-Band and Wide-Band Predictions; IEEE JOURNAL ON SELECTED AREAS IN COMMUNICATIONS, VOL. 18, NO. 3, MARCH 2000.
- [5] C. A. Balanis, Advanced Engineering Electromagnetics. New York:Wiley, 1989.
- [6] J. B. Keller, "Geometrical theory of diffraction," J. Opt. Soc. Amer., vol.52, pp. 116–130, Feb. 1962.
- [7] Robert G., Prabhakar H., A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface, Proceedings of the IEEE, VOL, 62, NO. 11, November 1974.
- [8] Schettino, D.N;Moreira, F.J.S;Rego, C.G, Efficient Ray-Tracing Techniques for Three-Dimensional Analyses of Propagation in Mobile Communications: Application to Picocell and Microcell Scenarios, Electromagnetic Field Computation, 2006 12th Biennial.
- [9] 顾晓龙, 章文勋, 云正清, 等. 利用可见性概念改进基于镜像原理的射线追踪法 [J]. 电波科学学报, 2001, 16(4): 464-467.
- [10] M. C. Lawton and J. P. McGeehan, "The application of a deterministic ray launching algorithm for the prediction of radio channel characteristics in small—Cell environments," IEEE Trans. Veh[9].
- [11] 廖斌, 赵昵丽, 朱守正; 基于虚拟源树的射线跟踪算法的研究; 华东师范大学学报, 2008 年 5 月第 3 期. Technol., vol. 43, pp. 955–969, Nov. 1994.

- [12] S. Y. Tan and H. S. Tan, “UTD propagation model in an urban street scene for microcellular communications,” *IEEE Trans. Electromag. Compat.*, vol. 35, pp. 423–428, Nov. 1993.

附录一

平行入射线的考虑。

对平行入射线，根据入射方向，有两种情况，下面分别进行讨论：

1. 入射角为 0。

设绕射角为 α_2 ，则可得 $\beta^+ = \beta^- = \alpha_2$ 。所以， $\alpha^+(\beta^-) = \alpha^+(\beta^+)$, $\cot(\frac{\pi+\beta^-}{2\pi}) = \cot(\frac{\pi+\beta^+}{2\pi}$, $\cot(\frac{\pi-\beta^-}{2\pi} = \cot(\frac{\pi-\beta^+}{2\pi}$ 。因此绕射系数为，

$$\begin{aligned} D &= \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \cdot \left\{ \cot\left(\frac{\pi+\beta^-}{2n}\right)F(kLa^+(\beta^-)) + \cot\left(\frac{\pi-\beta^-}{2n}\right)F(kLa^-(\beta^-)) \right. \\ &\quad \left. - [\cot\left(\frac{\pi+\beta^+}{2n}\right)F(kLa^+(\beta^+)) + \cot\left(\frac{\pi-\beta^+}{2n}\right)F(kLa^-(\beta^+))] \right\} \\ &= \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \cdot \left\{ \cot\left(\frac{\pi+\beta^+}{2n}\right)F(kLa^+(\beta^+)) + \cot\left(\frac{\pi-\beta^+}{2n}\right)F(kLa^-(\beta^+)) \right. \\ &\quad \left. - [\cot\left(\frac{\pi+\beta^+}{2n}\right)F(kLa^+(\beta^+)) + \cot\left(\frac{\pi-\beta^+}{2n}\right)F(kLa^-(\beta^+))] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

即入射角为 0 时，绕射角在任意角度散射系数均为 0，不发生散射。考虑传播路径，认为其按照全部能量进行直射传播，与无障碍物的情况相同。

2. 入射角为 π 。

这种情况下，入射角 $\alpha_1 = \pi$ ，设绕射角为 α_2 ，则可得 $\beta^+ = \alpha_2 + \pi$, $\beta^- = \alpha_2 - \pi$ 。此种情况下散射系数不为 0。但是，因为 $n = 3/2$,

$$\cot\left(\frac{\pi+\beta^-}{2n}\right) = \cot\left(\frac{\alpha_2}{2n}\right), \cot\left(\frac{\pi-\beta^-}{2n}\right) = \cot\left(\frac{-\alpha_2}{2n}\right) = -\cot\left(\frac{\pi+\beta^-}{2n}\right) \quad (40)$$

$$\cot\left(\frac{\pi+\beta^+}{2n}\right) = \cot\left(\frac{\alpha_2+2\pi}{2n}\right), \cot\left(\frac{\pi-\beta^+}{2n}\right) = \cot\left(\frac{2\pi-\alpha_2}{2n}\right) \quad (41)$$

$$\cot\left(\frac{\pi+\beta^-}{2n}\right) = \cot\left(\frac{\pi-\beta^-}{2n}\right) = \cot\left(\frac{\pi+\beta^+}{2n}\right) = \cot\left(\frac{\pi-\beta^+}{2n}\right) = 0 \quad (42)$$

可得 $\alpha_2 = \pi/2$ ，此时 $D = 0$ 。即此情况下绕射角为 $\pi/2$ 时无绕射分量。