

(由组委会填写)

第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学校

三峡大学

参赛队号

11075020

1.孟荣华

2.余 刚

队员姓名

3.李 骥

(由组委会填写)



第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题目 变循环发动机部件法建模及优化

摘要：

本文主要解决的是变循环发动机部件法建模及优化问题。建立了基于多维非线性隐式方程组的变循环发动机部件模型，分别采用牛顿—拉夫逊法和遗传算法对模型求解；建立了以发动机推力 F 和耗油率 scf 为目标的多目标最优化模型，采用遗传算法对发动机单涵道工作模式下的工作参数进行优化，以使其达到最佳性能。具体讨论了发动机性能最优时， $CDFS$ 导叶角、低压涡轮导叶角、尾喷管喉道面积等发动机参数随飞行马赫数变化的规律。

针对问题一：首先根据附件 3 中的标准化公式，对附录 4 给出的风扇的增压比进行标准化处理得到 zz 值。然后画出风扇流量在 9 种不同的换算转速下随增压比函数值变化的曲线图，如图 4 所示。根据附件 2 给出的各部件计算公式，采用发动机部件建模法求出风扇和 $CDFS$ 的出口总温、总压和流量，如下表所示：

指标	出口总温	出口总压	出口流量
风扇	379. 2879	1. 3057	19. 0477
$CDFS$	420. 3209	1. 7973	17. 1329

针对问题二：在双涵道模式下，建立了发动机工作平衡的多维非线性隐式方程组。针对多维非线性隐式方程组模型的复杂性及隐式性的特点，由于迭代过程存在可能不收敛，因此本文采用了牛顿—拉夫逊法和遗传算法 2 种不同算法进行求解。对于方程组采用两种算法分别求得牛顿—拉夫逊法的满意解和遗传算法的最优解如下表所示：

变量	n_H	Z_{CL}	Z_{CDFS}	Z_{CH}	T_4^*	Z_{TH}	Z_{TL}
牛顿—拉夫逊法	0.950	0.541	0.451	0.306	1800	0.201	0.14
遗传算法	0.919	0.455	0.477	0.293	1800	0.172	0.1

根据题目要求，在文中陈述了相应算法的关键步骤及其解释，并从多个方面比较了 2 种算法的有效性，结果如下表所示：

评价指标	收敛性	计算精度	计算效率	其他指标
牛顿-拉夫逊法	局部收敛性	高精度	较高	对始值较敏感
遗传算法	全局收敛	高精度	不理想	无始值要求，通用

对于问题三：第 1 小问是在单涵道模式下，建立了以发动机推力 F 和耗油率 scf 为目标的多目标最优化模型，并首先采用加权适应度函数将多目标优化问题转换为了单目标求解问题，采用遗传算法进行求解，得到发动机性能最优时 $CDFS$ 导叶角度、低压涡轮导叶角度、尾喷管喉道面积值如下表所示：

α_{CDFS}	α_{CH}	A_8
-5	2.78	9.51×10^3

第 2 小问在第 1 小问的基础上，增加了马赫数的变化范围从 1.1 到 1.6，且后混合器内、外涵道可调等条件。采用第 1 小问的遗传算法，选定了马赫数为 1.1、1.2、1.3、1.4、1.5、1.6 时，求解发动机性能最优时 $CDFS$ 导叶角度、低压涡轮导叶角度、尾喷管喉道面积的值如下表所示，并分别作出了 $CDFS$ 导叶角度、低压涡轮导叶角度、尾喷管喉道面积随马赫数变化规律的曲线图。

Ma	α_{CDFS}	α_{CH}	A_8	F	F_s	scf
1.1	-4.89	-0.3600	9.53×10^3	9557.3	719.8540	0.1551
1.2	-3.55	-0.8430	9.63×10^3	10292	720.1292	0.1516
1.3	-4.95	0.3930	9.51×10^3	10507	695.1700	0.1520
1.4	-4.99	-4.9900	9.54×10^3	9405.8	612.7537	0.1730
1.5	-5.00	2.7800	9.51×10^3	12458	715.1500	0.1329
1.6	-4.69	6.0300	9.56×10^3	14492	752.7750	0.1164

关键词：多维非线性隐式方程组 牛顿—拉夫逊法 遗传算法 加权适应度函数 多目标优化

1 问题重述

1.1 问题提出的背景

由飞机/发动机设计原理可知,对于持续高马赫数飞行任务,需要高单位推力的涡喷循环,反之,如果任务强调低马赫数和长航程,就需要低耗油率的涡扇循环。双涵道变循环发动机可以同时具备高速时的大推力与低速时的低油耗。变循环发动机的内在性能优势,受到了各航空强国的重视,是目前航空发动机的重要研究方向。

1.2 变循环发动机部件建模法

燃气涡轮发动机的特性可以用实验方法和计算方法获得。但实验的方法需要研制复杂的设备、投入巨额的资金和消耗巨大的能源,因此实验的方法不可能经常采用。

随着计算能力的不断提高,发动机数学模型研究的不断深入,计算机仿真精度也在不断提高,一定程度上弥补了实验方法的不足,尤其是在发动机型号研制过程中,燃气涡轮发动机计算机仿真技术发挥了不可替代的作用。

燃气涡轮发动机是由进气道、压气机、主燃烧室、涡轮、喷管等部件组成的。如果计算机能够对这些部件的性能进行准确的模拟,那么也就能准确地模拟整个发动机的性能。这种建立在准确模拟发动机各部件性能基础上的发动机性能计算方法,称为部件法。该方法是建立在发动机各部件特性已知的基础上的,因此是计算精度较高的一种方法。附录 1 分别对变循环发动机每个部件的计算公式进行了逐一介绍。

1.3 发动机平衡方程

发动机各部件匹配工作时,受如下 7 个平衡方程制约。

- (1) 低压轴功率平衡
- (2) 高压轴功率平衡
- (3) 高压涡轮进口截面流量平衡
- (4) 低压涡轮进口截面流量平衡
- (5) 后混合器静压平衡
- (6) 尾喷管面积平衡
- (7) 扇出口流量平衡

1.4 要解决的问题

问题一: 1) 要求画出附录 4 中风扇特性数据表中流量随压比函数值变化的图形。

2) 设在发动机飞行高度 $H = 11\text{km}$, 飞行马赫数 $Ma = 0.8$ 的亚音速巡航点, 导叶角度均设置为 0° , 风扇和 CDFS 的物理转速都为 0.95, 风扇和 CDFS 的压比函数值都为 0.5, 求风扇和 CDFS 的出口总温、总压和流量。

问题二: 设在发动机飞行高度 $H = 11\text{km}$, 飞行马赫数 $Ma = 0.8$ 的亚音速巡航点, 采用双涵道模式, 导叶角度均设置为 0° , 选择活门完全打开, 副外涵道面积设为 $1.8395\text{e}+003$, 后混合器出口总面积设置为 $A_6 = 2.8518\text{e}+004$, 尾喷管喉道面积 $A_8 = 9.5544\text{e}+003$, $n_L = 0.85$ 。要求运用或设计适当的算法求解由发动机 7 个平衡方程 (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) 组成的非线性方程组。陈述算法的关键步骤及其解释, 尽可能讨论算法的有效性。

问题三: 1) 设在发动机飞行高度 $H = 11\text{km}$, 飞行马赫数 $Ma = 1.5$ 的超音速巡航点, 发动机采用单涵道模式, 将选择活门面积设置为 0, 风扇导叶角度、

高压压气机导叶角度、高压涡轮导叶角度均设置为 0° ，后混合器面积设置为 $A_6=2.8518\text{e}+004$ 。请问发动机 *CDFS* 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积 3 个量为多少时，发动机的性能最优？

2) 试研究发动机飞行高度 $H=11\text{km}$ ，飞行马赫数从 $Ma=1.1$ 变化到 $Ma=1.6$ ，发动机特性最优时，*CDFS* 导叶角度、低压涡轮导叶角度、尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律。此时发动机采用单涵道模式，将选择活门面积设置为 0，风扇导叶角度、高压压气机导叶角度、高压涡轮导叶角度均设置为 0° ，后混合器出口总面积设置为 $2.8518\text{e}+004$ ，后混合器内、外涵道面积可调（即不受附录 1 后混合器给定的内、外涵道面积值的约束）。

2 模型假设及符号说明

2.1 模型假设

假设一：当气体压力不大于 $30\times 10^5 Pa$ 时，燃气状态遵循理想气体状态方程；

假设二：建模过程中忽略外在因素，如天气等对发动机平衡状态的影响；

假设三：忽略高温气流与发动机结构部件间的热交换；

假设四：不考虑容积效应；

假设五：假设发动机密封性能很好，不存在漏气现象；

2.2 符号说明

符号	符号说明
n_L	低压转速（风扇、低压涡轮物理转速）
n_H	高压转速（高压压气机、 <i>CDFS</i> 、高压涡轮物理转速）
Z_{CL}	风扇压比函数值
Z_{CDFS}	<i>CDFS</i> 压比函数值
Z_{CH}	高压压气机压比函数值
T_4^*	主燃烧室出口温度
Z_{TH}	高压涡轮压比函数值
Z_{TL}	低压涡轮压比函数值
α_L	风扇导叶角
α_{CDFS}	<i>CDFS</i> 导叶角
α_H	高压压气机导叶角
α_{CH}	低压涡轮导叶角
A_i	发动机第 i 部件的截面积
Ma	飞行马赫数
P_0	标准大气条件下环境压力（静压）
T_0	标准大气条件下的环境温度（静温）
H	发动机飞行高度
n_{cor}	换算转速
zz	压比函数值
R	气体常数

3 问题分析

3.1 问题一分析

问题一共有 2 小问,第 1 小问要求研究风扇特性随压比函数值变化的规律。附录 4 中给出了风扇特性的增压比、流量和效率,需先根据压比函数公式求出增压比对应的压比函数值,即对附录 4 中给出的增压比进行标准化处理。根据得到的压比函数值和气流流量画出 9 种不同的换算转速下风扇流量随压比函数值变化的图形。

第 2 小问要求风扇和 *CDFS* 的出口的总温、总压和流量。由题中给定的发动机工作条件可知变循环发动机的工作模式是双循环模式。在双循环模式下,根据附录 1 中给出的各部件计算公式,按照气流流向求风扇和 *CDFS* 的出口总温、总压和流量。在求 *CDFS* 出口指标的时候需考虑风扇出来的气流分流一部分到副外涵道,该处不能直接使用风扇出口的流量,需利用 *CDFS* 的特性数据,以及线性插值法计算压气机的换算流量,进而求出 *CDFS* 出口的流量。

3.2 问题二分析

问题二要求运用适当的算法求解由发动机 7 个平衡方程组成的多维非线性隐式方程组,并陈述算法的关键步骤及其解释,尽可能讨论算法的有效性。

问题二的工作模式也是双涵道模式。需注意气流在从风扇出来后经过分流一部分进入 *CDFS*,一部分进入副外涵道。按照题目的要求,需先选定变量,从 12 个给出的已知变量中筛选 7 个关键变量 n_H 、 Z_{CL} 、 Z_{CDFS} 、 Z_{TH} 、 T_4^* 、 Z_{TL} 、 Z_{CH} 。将题目中给出的 7 个方程转化为以 7 个关键变量为自变量的方程,并建立相关的模型。由于得出的方程组为多维非线性隐式方程组,各变量之间的关系也非常的复杂,平衡方程求解发动机的共同工作点,经常会出现模型迭代不收敛的问题。根据该特点本文将选用牛顿-拉夫逊法和遗传算法 2 种算法分别进行求解。问题二中要求尽可能讨论算法的有效性,本文将从收敛性、计算精度、计算效率三个方面评价 2 个算法在求解发动机多维非线性隐式数学模型中的有效性。

3.3 问题三分析

问题三共有 2 个问题。第 1 小问要求研究飞行高度 $H=1000m$,飞行马赫 $Ma=1.5$ 时发动机性能最优工作参量: *CDFS* 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积。分析问题三给出的背景可知,该问题需在发动机单涵道模式下进行求解。在该工作模式下,风扇出口气流全部进入 *CDFS* 加压后,绝大部分气流经高压压气机进入核心机,产生高推力。部分气流经主外涵道、后混合器进入加力燃烧室发生燃烧反应。

发动机在单涵道模式下,各部件的计算公式仍然采用附录 1 里给定的发动机部件计算公式。需要根据空气在发动机里面的运行路线变化,修正七个平衡方程,建立多目标优化模型。

第 2 小题需要求取飞行高度 $H=1000m$,马赫数从 1.1 到 1.6 不断变化情况下,发动机性能最优时, *CDFS* 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律。在第 1 小问的采用遗传算法求解的基础上,可分别求取 $Ma=1.1$ 、 $Ma=1.3$ 、 $Ma=1.5$ 、 $Ma=1.6$ 时, *CDFS* 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积的值,由此确定 *CDFS* 导叶角度、低压涡轮导叶角度

和喷管喉道面积与马赫数的关系，最终确定它们随马赫数变化的规律。

4 流量随压比函数值变化图形

4.1 资料准备

变循环发动机工作原理

变循环发动机是指通过改变发动机某些部件的几何形状、尺寸或位置来改变其热力循环的燃气涡轮发动机。通过变循环调节改变发动机的循环参数，如涵道比、空气流量或增压比，可使发动机在各种工作状态下都具有最有性能。对涡扇发动机而言，*VCE* 研究的重点是改变涵道比，如在加速、爬升和超声速飞行时，减小涵道比，以窝喷模式工作，使发动机具有高的单位推力；在起飞、下降和亚声速飞行时，增大涵道比，以涡扇模式工作，降低起飞噪声和巡航耗油率。

问题一、问题二研究对象是双涵变循环发动机的涡扇模式，问题三是在窝喷模式下研究。

变循环发动机的基本构造见图 1、图 2，其主要部件有：进气道、风扇、副外涵道、*CDFS* 涵道、核心驱动风扇级（*CDFS*）、主外涵道、前混合器、高压压气机、主燃烧室、高压涡轮、低压涡轮、后混合器、加力燃烧室、尾喷管。双涵道模式下，选择活门和后混合器（后 *VABI*）全部打开；单涵道模式下，选择活门关闭，后混合器关小到一定位置。

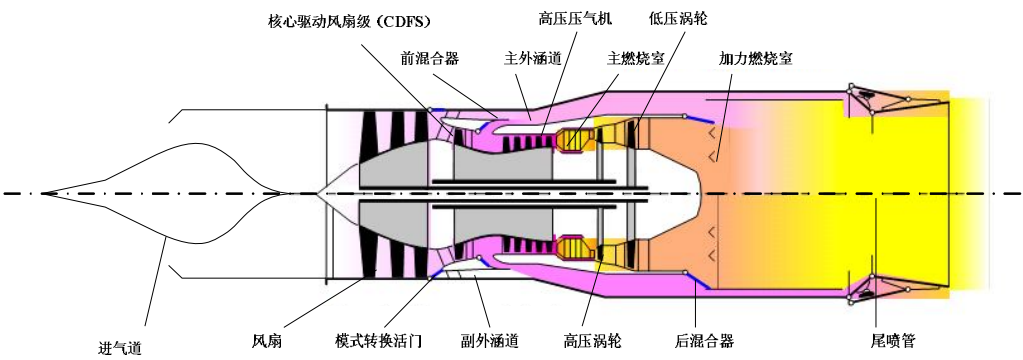
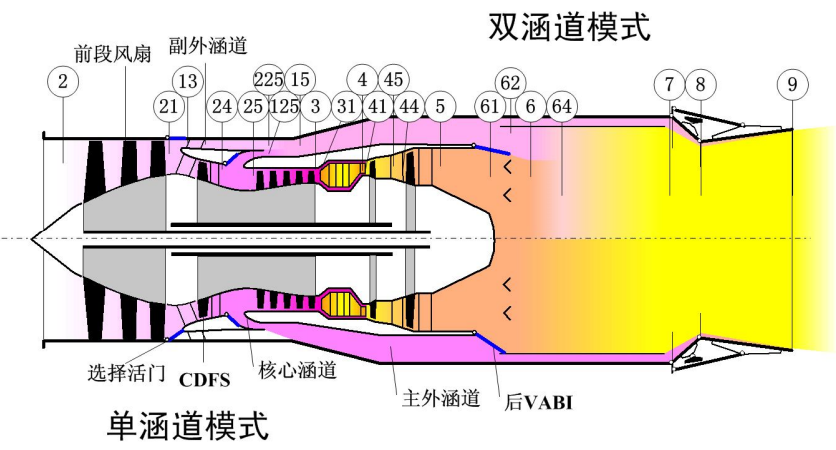


图 1 变循环发动机的基本构造



（图中数字序号表示发动机各截面参数的下脚标）

图 2 变循环发动机的基本构造

各部件之间的联系如图 3 所示，变循环发动机为双转子发动机，风扇与低压涡轮相连，*CDFS*、高压压气机与高压涡轮相连，如图 3 下方褐色的线所示。蓝色的线表示有部件之间的气体流动连接（图 3 中高压压气机后不经主燃烧室的分流气流为冷却气流，在本题中忽略不计）。

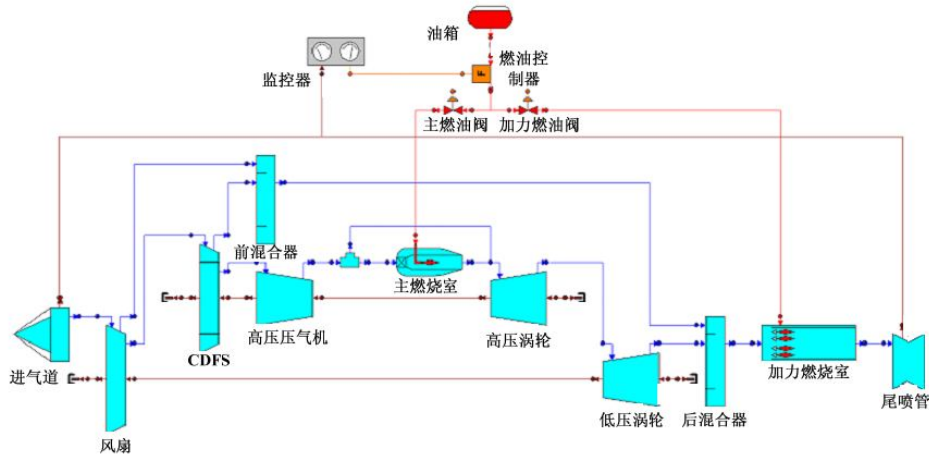


图 3 变循环发动机工作原理图

4.2 工作原理

变循环发动机有两种工作模式，分别为涡喷模式和涡扇模式。

发动机在亚音速巡航的低功率工作状态，风扇后的模式转换活门因为副外涵与风扇后的压差打开，使更多空气进入副外涵，同时前混合器面积开大，打开后混合器，增大涵道比，降低油耗，此时为发动机的涡扇模式。问题一和问题二的发动机均为涡扇模式。

发动机在超音速巡航、加速、爬升状态时，前混合器面积关小，副外涵压力增大，选择活门关闭，迫使绝大部分气体进入核心机，产生高的推力，此时为发动机的涡喷模式。问题三涉及到的发动机模式为涡喷模式。

4.3 数据处理

附录 3 中给出的压气机压比函数值的概念为：设压气机某换算转速所对应的增压比数据（见附录 4）的最大值为 pr_{\max} ，最小值为 pr_{\min} ，则定义该换算转速

对应的压气机增压比 pr 的压比函数值 zz 为：
$$zz = \frac{pr - pr_{\min}}{pr_{\max} - pr_{\min}}$$
，即压气机增压比

的标准化变量。将附录 4 中的增压比数据标准化处理，得到流量与对应压比值。

4.4 流量随压比函数值变化图形

依据风扇特性表中数据，画出流量随压比函数值变化的图形，如图 4 所示：

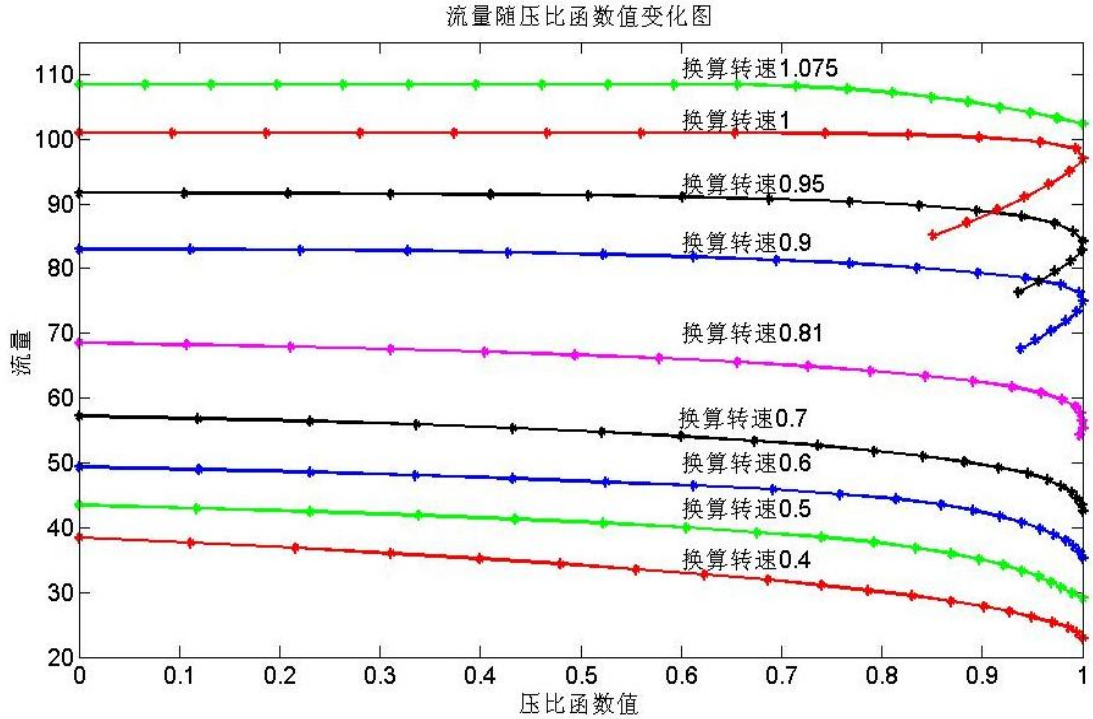


图 4 风扇特性流量随压比函数值变化的图形

4.5 结果分析

由风扇流量随压比函数值变化的图中可以看出：在不同换算转速条件下，流量均随压比函数值的增大而呈整体下降趋势；随着换算转速的增加，该下降趋势越来越不明显；同一压比函数值下，换算转速越大，对应流量也越大；在高换算转速下，压比函数值达到一定程度后，同一压比函数值对应多个风扇流量。

5 风扇和 CDFS 出口总温、总压和流量的建模与求解

5.1 已知数据

由问题一可知，在求解风扇和 CDFS 的出口总温、总压和流量时，有以下已知数据。详见表 1：

表 1 $zz = 0.5$ 时求解需要的已知数据

参数	数据
飞行高度	$H = 11km$
飞行马赫数	$Ma = 0.8$
导叶角度	$\alpha_L = \alpha_{CDFS} = \alpha_H = \alpha_{CH} = 0^\circ$
风扇和 CDFS 的物理转速	$n_L = n_H = 0.95$
风扇和 CDFS 的压比函数值	$Z_{CL} = Z_{CDFS} = 0.5$

5.2 进气道出口总温、总压模型的建立与求解

随着计算能力的不断提高，发动机数学模型研究的不断深入，计算机仿真精度也在不断提高一定程度上弥补了实验方法的不足。燃气涡轮发动机是由进气道、压气机、主燃烧室、涡轮、喷管等部件组成的。现在常用的部件法是建立在模拟发动机各部件性能基础上的发动机性能计算方法，计算精度较高。本题中求风扇和CDFFS出口的总温、总压和流量。发动机部件解析模型详见附录1。

5.2.1 计算标准大气条件下环境压力 p_0 （静压），环境温度 T_0 （静温）：

$$\begin{cases} p_0 = 1.01325 * \left(1 - \frac{H}{44.308}\right)^{5.2553} \\ T_0 = 288.15 - 6.5 * H \end{cases} \quad (5.1)$$

将已知 $H = 11km$ 代入公式（5.1）可求得：

$$\begin{cases} p_0 = 0.2262bar \\ T_0 = 216.6500K \end{cases}$$

5.2.2 进气道进口总温、总压模型为：

$$\begin{cases} T_0^* = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right) \\ p_0^* = p_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ T_1^* = T_0^* \\ p_1^* = p_0^* * \sigma_i \end{cases} \quad (5.2)$$

进气道进口的气体为纯空气，取 $\gamma = 1.4$ ，当 $Ma = 0.8$ 时，进气道总压恢复系数 $\sigma_i = 1.0$ 。

5.2.3 求解进气道出口总温、总压可得：

$$\begin{cases} T_1^* = 244.3812 \\ p_1^* = 0.3448 \end{cases}$$

5.3 风扇出口总温、总压和流量模型的建立与求解

双涵道变循环发动机中三个压气机部件分别是风扇、CDFFS 和高压压气机。求风扇出口的总温、总压和流量需运用压气机的计算公式求解。由图 3 可以看出，空气经进气道直接进入风扇，因此风扇进口总温、总压即进气道出口总温、总压：

$$\begin{cases} T_{Lin}^* = 244.3812 \\ p_{Lin}^* = 0.3448 \end{cases} \quad (5.3)$$

5.3.1 计算风扇的换算转速：

$$n_{cor} = n \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \quad (5.4)$$

将已知数据 n_L 、 $T_{Lin,d}^*$ 、 T_{Lin}^* 代入公式 (5.4)，可得，

$$n_{21cor} = 1.0316$$

5.3.2 利用线性插值法计算出风扇特性图上的参数

在给定 $n_{21cor} = 1.0316$ ，压比函数值为 $zz = 0.5$ 时，利用内插值或外插值得到参数：

$$\begin{cases} pr_{Lc,map} = 2.1668 \\ \eta_{Lc,map} = 0.7862 \\ W_{Lc,map} = 104.16 \end{cases}$$

5.3.3 计算风扇的增压比、效率和换算流量

将 5.3.2 中求出的增压比 $pr_{Lc,map}$ 、效率 $\eta_{Lc,map}$ 和换算流量 $W_{Lc,map}$ 代入公式 (5.5) 修正后得到风扇的增压比、效率和换算流量：

$$\begin{cases} pr_c = C_{pr}(pr_{c,map} - 1)(1 + \frac{k_{pr}}{100}\alpha) + 1 \\ W_c = C_w W_{c,map}(1 + \frac{k_w}{100}\alpha) \\ \eta_c = C_\eta \eta_{c,map}(1 + \frac{k_\eta^2}{100}\alpha) \end{cases} \quad (5.5)$$

其中 k_{pr} 、 k_w 、 k_η 分别是增压比、效率和换算流量的修正系数。风扇对应的

k_{pr} 、 k_w 、 k_η 这三个值分别取 1，1，0.01；风扇导叶角变化范围： $-5^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ ；

$$\text{风扇: } \begin{cases} C_{Lpr} = 2.3894 \\ C_{LW} = 0.4950 \\ C_{L\eta} = 1.0684 \end{cases}$$

将已知数据代入公式 (5.5)，可得风扇的增压比、效率和换算流量分别为：

$$\begin{cases} pr_{Lc} = 3.788 \\ W_{Lc} = 51.5592 \\ \eta_{Lc} = 0.84 \end{cases}$$

5.3.4 风扇出口参数模型的建立与求解

风扇出口总压： $p_{Lout}^* = p_{Lin}^* * pr_{Lc}$ ；

由附录2给出的空气的熵公式计算风扇进口熵： $\psi_{in} = \psi(T_{in}^*)$ ，

由附录2给出的空气的焓公式计算风扇进口焓： $\psi_{in} = \psi(T_{in}^*)$ ；

将求得数据代入公式 (5.6) 求得风扇出口理想熵：

$$\psi_{out,ei} = \psi_{in} + \frac{R}{M} \ln pr_c \quad (5.6)$$

这里 $M=1$ ， R 是气体常数；

由风扇出口理想熵 $\psi_{out,ei} = \psi(T_{out,ei}^*)$ ，计算风扇出口理想总温： $T_{Lout,ei}^*$ ；

计算风扇出口理想焓： $h_{out,ei} = h(T_{out,ei}^*)$ ；

根据公式 $\eta_c = \frac{h_{out,ei} - h_{in}}{h_{out} - h_{in}}$ 计算风扇出口焓 h_{Lout} ；

由风扇出口焓 $h_{out} = h(T_{out}^*)$ 求风扇出口总温：

$$T_{Lout}^* = 241.3986；$$

将求得数据代入公式（5.7）计算风扇流量：

$$W_a = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*} \quad (5.7)$$

其中，风扇： $p_{Lin,d}^* = 1.01325$ ；

可得风扇出口流量 $W_{La} = 19.516$

1) 因此，风得到风扇出口总温、总压和流量的模型为：

$$\begin{cases} p_{Lout}^* = p_{Lin}^* \cdot pr_{Lc} \\ h_{out} = h(T_{out}^*) \\ W_a = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*} \end{cases} \quad (5.8)$$

2) 求解风扇的出口总温、总压和流量得：

$$\begin{cases} T_{Lout}^* = 379.2879 \\ p_{Lout}^* = 1.3057 \\ W_{La} = 19.0477 \end{cases}$$

5.4 CDFS 出口总温、总压和流量的求解

由于 CDFS 与风扇同属压气机部件，对于总温、总压和流量的计算采用同一种计算方法。

5.4.1 数据准备

1) 利用公式（5.4）计算出 CDFS 的换算转速 $n_{CDFS_{cor}} = 1.2658$

2) 利用线性插值法计算出 CDFS 的换算转速为 $n_{CDFS_{cor}} = 1.2658$ ，压比函数值为 $zz = 0.5$ 时特性图上的数据

$$\begin{cases} pr_{CDFSc, map} = 2.6800 \\ \eta_{CDFSc, map} = 0.7156 \\ W_{CDFSc, map} = 333.4201 \end{cases}$$

3) 用公式 (5.5) 求得 $CDFS$ 的增压比、效率、换算流量分别为:

$$\begin{cases} pr_c = 1.5139 \\ W_c = 50.0130 \\ \eta_c = 0.7871 \end{cases}$$

在双涵道模式下, 空气从风扇出来之后, 经过分流, 分别进入副外涵道和 $CDFS$, 因此 $CDFS$ 的进气总温和总压初始值为风扇出口的总温和总压。

$$\begin{cases} T_{CDFSin}^* = T_{Lout}^* = 241.3986 \\ p_{CDFSin}^* = p_{Lout}^* = 0.13061 \end{cases}$$

5.4.2 $CDFS$ 出口总温、总压、流量模型的建立与求解

$CDFS$ 出口总温、总压、流量模型为

$$\begin{cases} p_{Lout}^* = p_{Lin}^* \cdot pr_{Lc} \\ h_{out} = h(T_{out}^*) \\ W_a = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*} \end{cases}$$

题中给出 $p_{in,d}^* = 3.5464$, $T_{in,d}^* = 428.56862609$ 代入 $CDFS$ 出口总温、总压、流量模型可进行求解。

因此, 求得 $CDFS$ 的出口总温、总压和流量分别为:

$$\begin{cases} T_{CDFSout}^* = 420.3209 \\ p_{CDFSout}^* = 1.7973 \\ W_{CDFSout} = 17.1329 \end{cases}$$

5.5 结果分析

经过求解, 可以求得进气道、风扇、 $CDFS$ 出口总温、总压和流量如表 2 所示:

表 2 进气道、风扇、 $CDFS$ 出口总温、总压和流量

部件	T_{out}^*	p_{out}^*	W_{out}
进气道出口	244.3812	0.3448	无数据
风扇出口	379.2879	1.3057	19.0477
$CDFS$ 出口	420.3209	1.7973	17.1329

由表 2 可以看出, 气流从进气道进入风扇, 又经风扇进入 *CDFS*, 在该过程中, 气流温度逐渐升高, 压力也逐渐增大, 这是因为风扇和 *CDFS* 均属于发动机的压气机部件, 气流在经过这 2 个部件时被压缩, 导致压力增大、温度升高; 而气流流量从风扇进入 *CDFS* 有所降低, 是因为气流在此分流为两部分, 另外一部分流入了副外涵道。由此可知, 表 2 中结果符合发动机实际的工作状况, 较为合理。

6 发动机工作模型的建立与求解

6.1 发动机工作平衡多维非线性隐式方程组

6.1.1 发动机工作平衡的基本原理

发动机处于某一稳定工作状态时, 各部件状态是互相制约的, 需满足共同工作条件。根据热能平衡和功能平衡定理可知, 发动机中各部件共同工作条件有: 低压轴功率平衡、高压轴功率平衡、高压涡轮进口截面流量平衡、低压涡轮进口截面流量平衡、后混合器静压平衡、尾喷管面积平衡、风扇出口流量平衡。满足共同工作方程的工作点为发动机稳态工作点。

稳态工作点求解的基本思路是: 从进气道入口至尾喷管出口截面按照附录1给出的部件模型进行计算, 按气流流过的顺序, 完成所有部件气动热力计算。稳态工作室需同时满足7个共同工作方程, 联立7个方程得到一个隐式非线性方程组, 稳态工作点求解的数学问题即为求解以独立变量为未知数的非线性隐式方程组。要获得共同工作方程需进行一次完整的发动机气动热力计算。发动机部件模型的数学问题是求解一个复杂的多维非线性隐式方程组^[4]。

双外涵变循环发动机性能数值模拟流程图如图6所示

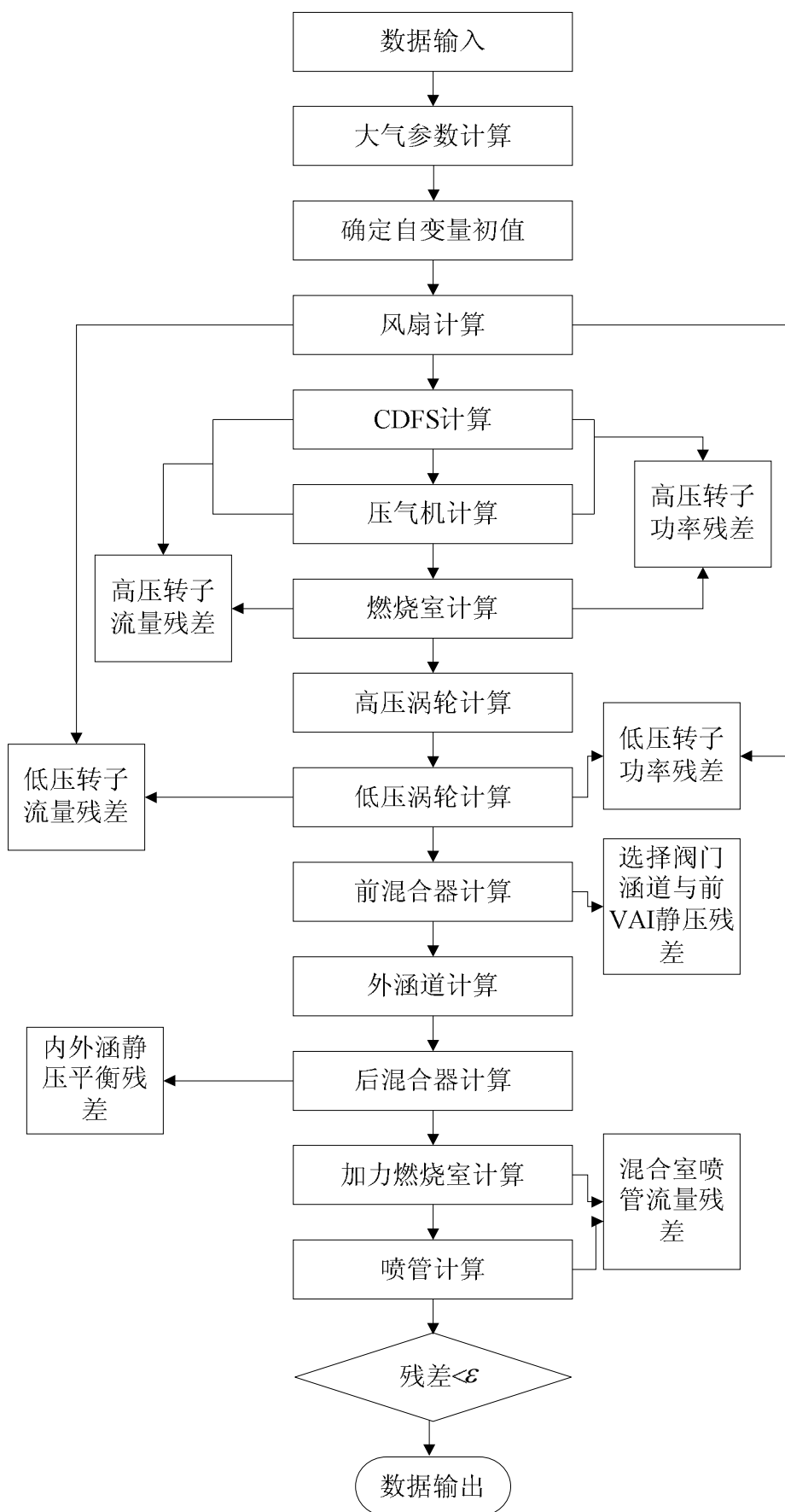


图5 双外涵变循环发动机性能数值模拟流程图

6.1.2 发动机稳态工作 7 个平衡方程

(1) 低压轴功率平衡方程

由题目中给出的图 3 可以看出，变循环发动机为双转子发动机，风扇与低压涡轮相连，*CDFS*、高压压气机与高压涡轮相连。因此可以建立如下低压轴功率平衡方程（6.1）和高压轴功率平衡方程（6.5）。

$$N_{CL} - N_{TL}\eta_{mL} = 0 \quad (6.1)$$

其中 N_{CL} 是风扇消耗功率， N_{TL} 是低压涡轮发出功率， $\eta_{mL}=0.99$ 为中间轴机械效率。

根据附录1中发动机部件的计算公式知：

$$\begin{cases} N_{CL} = W_{aL} \cdot l_{cL} \\ l_{cL} = h_{out,L} - h_{in,L} \\ W_a = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*} \\ W_c = C_W W_{c,map} (1 + \frac{k_w}{100} \alpha) \end{cases} \quad (6.2)$$

由公式（6.2）得：

$$N_{CL} = C_W \cdot W_{c,map} \cdot (1 + \frac{k_w}{100} \alpha) \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*} \cdot (h_{out,L} - h_{in,L}) \quad (6.3)$$

其中 $C_W=0.4950, k_w=1, \alpha=0, p_{in,d}^*=1.01325, T_{in,d}^*=288.15$ 。

同理求得：

$$N_{TL} = C_W \cdot W_{c,map} \cdot (1 + \frac{k_w}{100} \alpha) \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*} \cdot (h_{in,L} - h_{out,L}) \cdot \eta_m \quad (6.4)$$

其中 $C_W=0.3881, k_w=1, \alpha=0, \eta_m=0.99, p_{in,d}^*=11.3371, T_{in,d}^*=1.5405e+003$ 。

(2) 高压轴功率平衡方程

$$N_{CH} + N_{CDFS} - N_{TH}\eta_{mH} = 0 \quad (6.5)$$

N_{CH} 和 N_{CDFS} 分别是高压压气机和 *CDFS* 的消耗功率， N_{TH} 是高压涡轮发出功率， $\eta_{mH}=0.99$ 是高速轴的机械效率。

由公式（6.2）同理求得高压压气机的消耗功率为：

$$N_{CH} = C_W \cdot W_{c,map} \cdot (1 + \frac{k_w}{100} \alpha) \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*} \cdot (h_{out,H} - h_{in,H}) \quad (6.6)$$

其中 $C_W=0.38462, k_w=0.01, \alpha=0, p_{in,d}^*=4.8860, T_{in,d}^*=473.603961$

求得高压涡轮发出功率：

$$N_{TH} = C_W \cdot W_{c,map} \cdot (1 + \frac{k_w}{100} \alpha) \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*} \cdot (h_{in,H} - h_{out,H}) \eta_m \quad (6.7)$$

其中 $C_W=13.2121, k_w=1, \eta_m=0.99, \alpha=0, p_{in,d}^*=28.7297, T_{in,d}^*=1.5405e+003$
 $CDFS$ 的消耗功率:

$$N_{CDFS} = C_W \cdot W_{c,map} \cdot (1 + \frac{k_w}{100} \alpha) \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*} \cdot (h_{out,H} - h_{in,H}) \quad (6.8)$$

其中 $C_W=0.1500, k_w=1, \alpha=0, p_{in,d}^*=3.5464, T_{in,d}^*=428.56862609$

(3) 高压涡轮进口截面流量平衡方程

$$W_{g41} - W'_{g41} = 0 \quad (6.9)$$

W_{g41} 是高压涡轮进口截面气体流量, 即主燃烧室出口气体流量和冷却空气流量, W'_{g41} 是通过高压涡轮特性数据线性插值得到的高压涡轮流量 $W'_{g41}=3.0789$, 这里忽略冷却的空气流量。

由附录1中的2.3主燃烧室的计算公式可得

$$W_{g41} = W_{a3} \cdot f_b + W_{a3} \quad (6.10)$$

$$\text{其中 } f_b = \frac{h_4 - h_3}{\xi_b H_u + h_3}$$

W_{a3} 主燃烧室的气体是经高压压气机而来的, 因此由假设一, 可得主燃烧室的气体流量为高压压气机的出口流量。

(4) 低压涡轮进口截面流量平衡方程

$$W_{g45} - W'_{g45} = 0 \quad (6.11)$$

W_{g45} 是低压涡轮进口截面流量, 由主燃烧室出口气体流量和冷却空气流量计算得到, W'_{g45} 是通过低压涡轮特性数据线性插值得到的低压涡轮流量, 这里忽略冷却的空气流量。

由题中给出的低压涡轮进口截面流量由主燃烧室出口气体流量和冷却空气流量计算得到可知, $W_{g45} = W_{g41} = W_{a3} \cdot f_b + W_{a3}$ 。

(5) 后混合器静压平衡方程

$$p_{61} - p_{62} = 0 \quad (6.12)$$

p_{61} 和 p_{62} 分别是后混合器内、外涵道(主外涵道)的静压, 二者应平衡。

根据附录3气动函数及其他常用公式可知: 静压=总压 $\times \pi(\lambda)$, 即

$$p_{6i} = p_{6i}^* \cdot \pi(\lambda_{6i}) \quad i=1,2$$

根据附录1中内涵气流流量公式:

$$W_{g61} = k_m \frac{p_{61}^*}{\sqrt{T_{61}^*}} A_{61} q(\lambda_{61}) \quad (6.13)$$

其中: A_{61} —内涵出口面积, $A_{61}=5.3061e+003$;

p_{61}^* —为内涵出口总压；

T_{61}^* —为内涵出口总温。

$$W_{g62} = k_m \frac{p_{62}^*}{\sqrt{T_{62}^*}} A_{62} q(\lambda_{62}) \quad (6.14)$$

其中： A_{62} —外涵出口面积， $A_{62} = 2.3212\text{e}+004$ ；

p_{62}^* —为外涵出口总压；

T_{62}^* —为外涵出口总温。

由附录1中公式（2.17），即下列公式（6.15）可以求得求出混合器出口总温 T_6^* 、总压 p_6^* 、流量 W_{g6} ：

$$\begin{cases} W_{g61} + W_{g62} = W_{g6} \\ W_{g61} h_{61} + W_{g62} h_{62} = W_{g6} h_6 \\ p_{61}^* f(\lambda_{61}) A_{61} + p_{62}^* f(\lambda_{62}) A_{62} = p_6^* f(\lambda_6) (A_{61} + A_{62}) \\ W_{g6} = k_m \frac{p_6^*}{\sqrt{T_6^*}} A_6 q(\lambda_6) \end{cases} \quad (6.15)$$

其中： $A_6 = A_{61} + A_{62}$ ；

h_6 —为后混合器出口焓；

h_{61} —为后混合器内涵出口焓；

h_{62} —为后混合器外涵出口焓；

W_{g61} —为后混合器内涵出口流量；

W_{g62} —为后混合器外涵出口流量。

（注：必要时，后混合器出口总面积 $A_6 = 2.8518\text{e}+004$ 保持不变，内涵出口面积 A_{61} ，外涵出口面积 A_{62} 可以微调。）

（6）尾喷管面积平衡方程

$$A_8 - A'_8 = 0 \quad (6.16)$$

A'_8 为给定的尾喷管8截面的面积，这里 $A'_8 = 9.5544\text{e}+003$ 、 A_8 为按附录1尾喷管的有关公式计算出的尾喷管8截面的面积。

本文采用的是采用拉瓦尔（收敛-扩张）尾喷管，其形状见下图4：

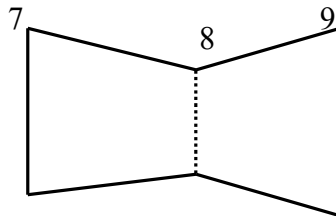


图 6 拉瓦尔尾喷管示意图

根据附录1发动机部件计算公式可知流量公式：

$$W_{g8} = k_m \frac{P_8^*}{\sqrt{T_8^*}} A_8 q(\lambda_8) \quad (6.17)$$

已知在拉瓦尔尾喷管中，任意截面总温、总压、流量均不变，则：

$$q(\lambda)A = \text{const}$$

根据加力燃烧室计算公式：

$$\begin{cases} P_{6out}^* = P_{6in}^* \cdot \sigma_6 \\ T_{6out}^* = T_{6in}^* \\ W_{g6out} = W_{g6in} \end{cases}$$

其中： P_{6in}^* 、 P_{6out}^* —进、出口总压；

T_{6in}^* 、 T_{6out}^* —进、出口总温；

W_{g6in}^* 、 W_{g6out}^* —进、出口流量；

σ_6 —总压恢复系数， $\sigma_6=1$ 。

(7) 风扇出口流量平衡方程

$$W_{a2} - W_{a21} - W_{a13} = 0$$

其中风扇出口的流量 W_{a2} 分流为副外涵流量 W_{a13} 和CDFS进口流量 W_{a21} ，三者之间应存在平衡关系。

6.1.3 方程组自变量参数的选定

根据题目中给出的发动机参数，可知共有12个假设已知的变量，而变循环发动机共同工作的方程只有7个，要保证这个非线性方程组有唯一解的必要条件是独立变量的个数不大于7。将以上12个参数都设为需要求解的独立变量显然是不可解的。因此，需要从中选择5个变量赋予给定值作为已知量，剩余7个变量作为待求的未知数。在问题二中，已经假设了导叶角度均设置为 0° ，即 $\alpha_L = \alpha_{CDFS} = \alpha_H = \alpha_{CH} = 0$ ，低压转速 $n_L = 0.85$ ，可将其他7个参数作为变量。

表 3 方程组中的变量参数

变量参数	说明	已知参数	说明
n_H	高压转速（高压压气机、CDFS、高压涡轮物理转速）	Z_{TH}	高压涡轮压比函数值
Z_{CL}	风扇压比函数值	Z_{TL}	低压涡轮压比函数值
Z_{CDFS}	CDFS压比函数值	Z_{CH}	高压压气机压比函数值
T_4^*	主燃烧室出口温度		

经过上述分析可知，每个平衡方程均可转化为变量 n_H 、 Z_{CL} 、 Z_{CDFS} 、 Z_{TH} 、 T_4^* 、 Z_{TL} 、 Z_{CH} 的函数。根据附录1给出的发动机部件计算公式，以及上述平衡方程，建立发动机工作平衡多维非线性隐式方程：

$$\begin{cases} f_1(n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, T_4^*, Z_{TH}, Z_{TL}, Z_{CH}) = 0 \\ f_2(n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, T_4^*, Z_{TH}, Z_{TL}, Z_{CH}) = 0 \\ \vdots \\ f_3(n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, T_4^*, Z_{TH}, Z_{TL}, Z_{CH}) = 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

采用变比热建模技术获得非线性隐式方程组没有显式的方程形式, 不失一般性, 将7个独立变量记为将7个独立变量 $(n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, T_4^*, Z_{TH}, Z_{TL}, Z_{CH})$ 记为 x , $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)$, 可得发动机工作平衡多维非线性隐式方程组模型为

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_7) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_7) = 0 \\ \vdots \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_7) = 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

6.2 牛顿-拉夫逊法求解发动机多维非线性隐式方程组

航空发动机特性计算的核心问题之一就是求解描述发动机部件共同工作的多维非线性隐式方程组。目前对非线性问题求解的基本方法是将非线性问题线性化再来求解, 因为现行问题求解的方法相对成熟。常用的发动机部件共同工作非线性方程组的求解方法通常是: 牛顿-拉夫逊法、*Broyden*法、 $n+1$ 点残量法、最速下降法、遗传算法等等, 本文将采用牛顿-拉夫逊法和遗传算法分别对发动机工作平衡非线性隐式方程组进行求解。

6.2.1 牛顿-拉夫逊法算法原理

理想情况下当发动机在某一设定状态下稳定工作, 会存在一组确定的独立变量满足公式(6.19), 即每个方程右端应为0。但由于各个部件气动热力计算过程也相当复杂, 使该隐式非线性方程组相当复杂, 加之实际建模过程中有些简化假设、部件特性误差、差值计算、非线性算法等数值计算误差等因素的影响, 很难得到恰好完全满足7个平衡方程的独立变量, 即共同工作方程组等式很难成立。换言之, 不可能直接通过简单的计算就得到共同工作方程组的解, 只能采用数值算法, 使共同工作方程等式右边接近0, 得到一定精度范围的数值解, 因此将共同工作方程组写成残差方程组形式

6.2.2 发动机多维非线性隐式模型转化为残差方程组模型为:

$$E(x) = E(x_1, x_2, \dots, x_7) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_7) = e_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_7) = e_2 \\ \vdots \\ f_7(x_1, x_2, \dots, x_7) = e_7 \end{cases} \quad (6.20)$$

$$E = |e_1| + |e_2| + \dots + |e_7| \quad (6.21)$$

6.2.3 牛顿-拉夫逊法的基本求解思路及关键步骤

为求得满足公式(6.19)的满意解, 则在算法过程中需解出满足于 $|E| < \varepsilon$ 的解。

牛顿-拉夫逊法(简称牛顿法)在数学上是求解非线性代数方程式的有效方法。牛顿-拉夫逊法的基本求解思路是: 在求解非线性方程 $f(x) = 0$ 时设定方程

解的初值为 x_0 ，其真解 x 与 x_0 相差 Δx_0 ，因此求解 x 的过程通常看做是对 Δx_0 的求解过程。

将非线性残差方程组按泰勒 (*Taylor*) 级数展开, 取一阶近似形成自变量的迭代通式。

记公式 (6.20) 为非线性方程组 $E(x) = e$

其中: $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $E(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$

将残差方程 $E(x)$ 的一阶泰勒展开:

$$E(x + \Delta x) = E(x) + J(x)\Delta x + O(\Delta x^2) \quad (6.22)$$

其中 $J(x)$ 为 $E(x)$ 的 *Jacobi* 矩阵

$$J(x) = \frac{\partial E}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial x_1} & \frac{\partial e_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial e_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial e_2}{\partial x_1} & \frac{\partial e_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial e_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial e_n}{\partial x_1} & \frac{\partial e_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial e_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

忽略二阶及其更高项, 对于方程组由 $E(x + \Delta x) = 0$, 从而:

$$J(x)\Delta x = -E(x) \quad (6.24)$$

解该线性方程组, 可得到 Δx (迭代的牛顿步长), 理论上:

$$\Delta x = -J^{-1}E \quad (6.25)$$

从而构造迭代过程:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \quad (6.26)$$

由 x_{k+1} 计算 E_{k+1} , 检查残差 E_{k+1} 是否满足 $\|E_{k+1}\|_2 \leq \varepsilon$ 的精度要求, 其中

$$\|E_{k+1}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (e_{i|k+1})^2}。$$

如果不满足要求返回继续迭代计算, $N-R$ 法求解发动机稳态模型的过程如图

当误差满足要求时, 得到的工作点即为发动机稳定工作的共同工作点, 得到的独立变量回代到部件级数学模型, 即得到当前稳定状态下发动机相关的工作参数和性能参数。

6.2.4 牛顿-拉夫逊法流程图

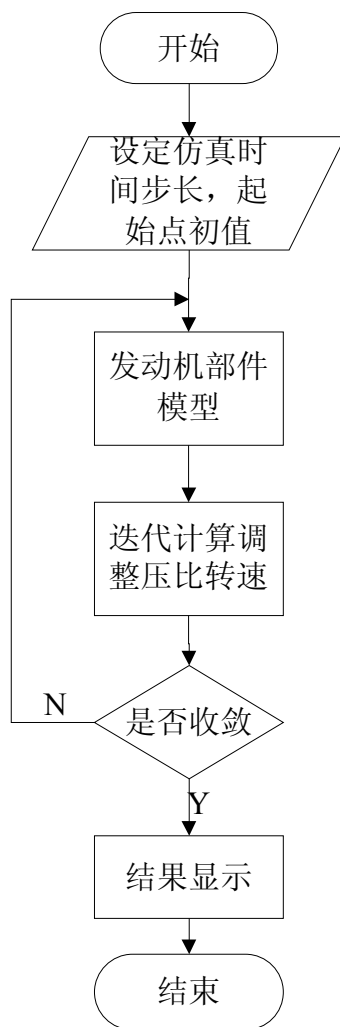


图 7 牛顿-拉夫逊法流程图

6.2.5 利用牛顿-拉夫逊法求得方程结果

用牛顿-拉夫逊法进行求解，得出方程组的满意解如表4:

表 4 牛顿-拉夫逊法求解方程组的满意解

变量	n_H	Z_{CL}	Z_{CDFS}	Z_{CH}	T_4^*	Z_{TH}	Z_{TL}
牛顿—拉夫逊法	0.950	0.541	0.451	0.306	1800	0.201	0.14

6.3 遗传算法求解多维非线性隐式方程组

6.3.1 遗传算法原理及关键步骤

遗传算法依据编码计算、优化无需梯度信息、不要求显式的函数形式、运算的隐并行性、以概率1收敛于全局最优解的特点，为发动机非线性数学模型中平衡方程以及模型中有关非线性方程求解提供了一种新的解法，因此将遗传算法应用到航空发动机数学模型，不仅具有理论意义，而且具有现实应用价值。

遗传算法步骤如下：

- (1) 随机产生初始化种群；
- (2) 计算种群副本个体的适应度函数；
- (3) 根据个体的适应度函数，采用二元锦标赛法选择出优良的个体，并保

留下来；

(4) 使用单点交叉方法和非一致性变异得到子代；

(5) 将父代种群与得到的子代进行合并，并采用精英保留策略，得到 N 个优秀的种群个体；

(6) 计算子代个体的适应度函数；

(7) 是否满足最大迭代次数，若满足就输出结果，若不满足就进入 (3)。

该算法流程图如图 所示

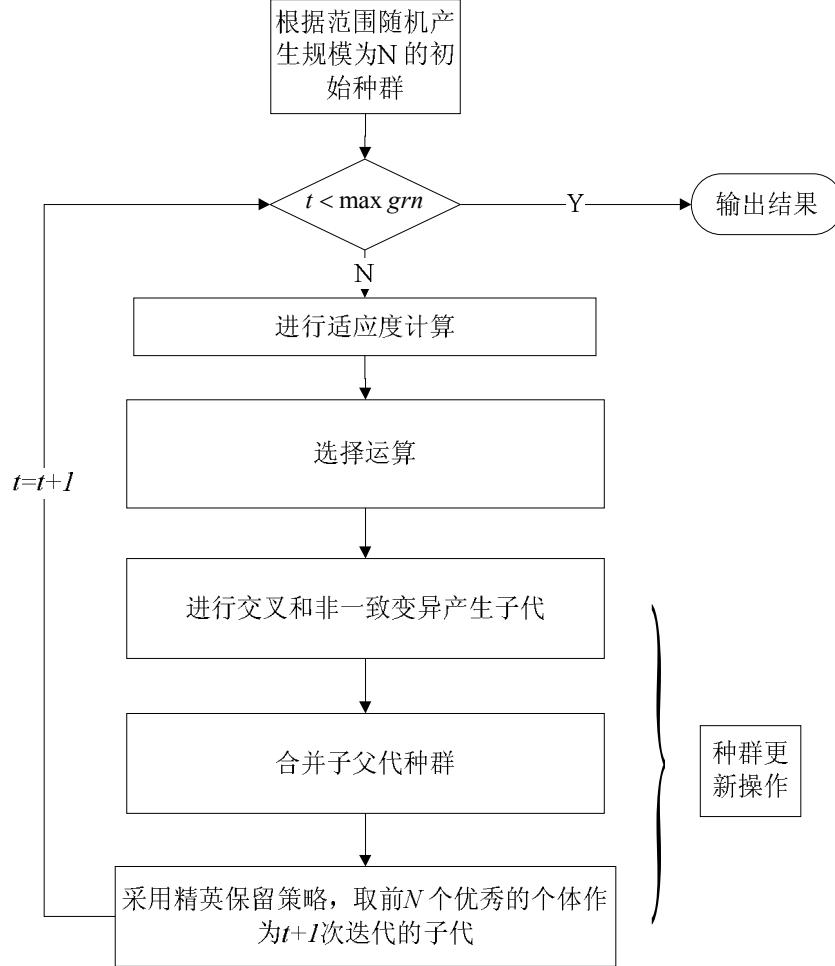


图 8 遗传算法流程图

6.3.2 首先将公式 (6.20) 的残差模型转换为以下最优化问题

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^7 |e_i| \quad (6.27)$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)$ ，显然，若方程组 (6.19) 有解，则适应度函数 (6.27) 的最小值为 0，如果求得的适应度函数的值越接近于 0，那么对应的方程组 (6.19) 的解就越精确。

确定变量的范围：由于 7 个方程对应 7 个自变量，所以选择将根据题中给出的说明确定 x 的搜索范围， $0 < x_1 < 1$ ， $0 < x_2 < 1$ ， $0 < x_3 < 1$ ， $1700 < x_4 < 2000$ ， $0 < x_5 < 1$ ， $0 < x_6 < 1$ 。

6.3.3 遗传算法求解多维非线性隐式方程组

运行遗传算法程序求解，得到适应度在 924.1565 时目标函数取得最小值，

最小值为 924.1565，适应度值随进化代数变化规律如图 9。

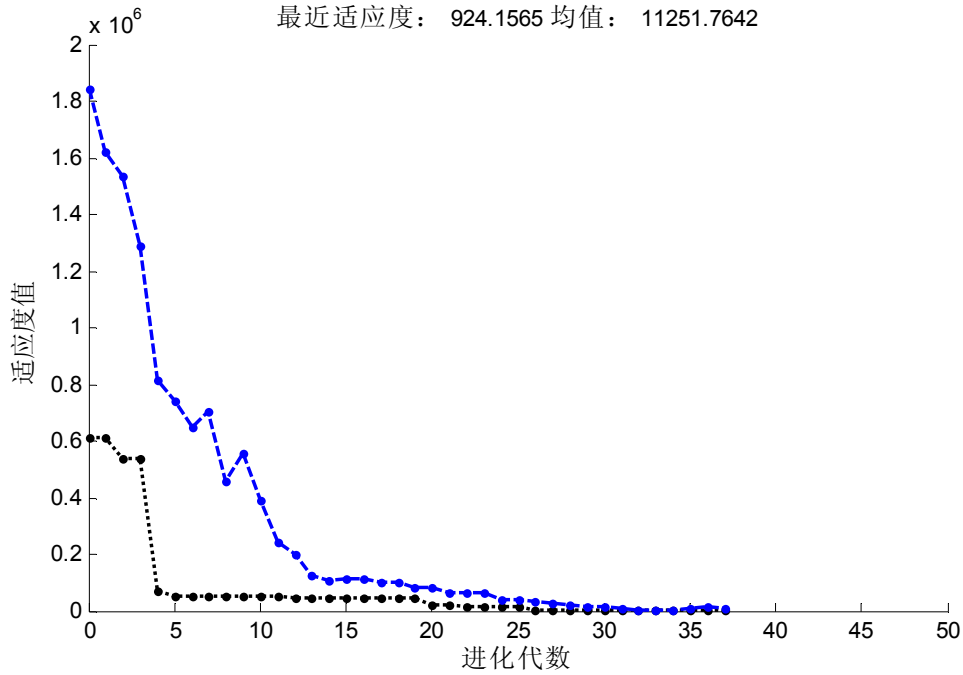


图 9 多维非线性隐式方程组适应度值变化图

适应度函数值为 924.1565 时，得到的各个自变量的值见表 3

表 5 多维非线性隐式方程组的满意解

$x_1 (n_H)$	$x_2 (Z_{CL})$	$x_3 (Z_{CDFs})$	$x_4 (Z_{CH})$	$x_5 (T_4^*)$	$x_6 (Z_{TH})$	$x_7 (Z_{TL})$
0.919	0.455	0.477	0.293	1800	0.172	0.1

6.4 牛顿-拉夫逊法和遗传算法的有效性讨论：

由于平衡方程求解发动机的共同工作点，经常会出现模型迭代不收敛的问题。根据该特点本文选用了牛顿-拉夫逊法和遗传算法 2 种算法进行求解。问题二中要求尽可能讨论算法的有效性，本文将从收敛性、计算精度、计算效率三个方面评价发动机非线性数学模型及其求解方法，其中收敛性是最重要的指标之一。

6.4.1 牛顿-拉夫逊法有效性分析

牛顿-拉夫逊法是基于函数的发动机平衡方法，由于发动机平衡方程是一类特殊的非线性方程组，没有解析式的表达式，在牛顿-拉夫逊法求解过程中，使用差商代替微分，对于试取值 X 下 $F(X) = E$ （残量）的解，当泰勒展开的二次项 $\frac{\partial^2 F(X_k)}{\partial X^2}$ 大小不同时会影响迭代结果的收敛与发散。牛顿-拉夫逊法的最大优点就是计算效率高。

牛顿-拉夫逊还存在一定的缺点：（1）如果矩阵元素数值相差较大，会形成病态矩阵，受计算机字长限制，方程不可能有解。（2）算法本身对初始值的选择依赖性较大，当初始值设计不合理时，容易形成局部收敛，产生局部最优解，甚至无解。

6.4.2 遗传算法有效性分析

遗传算法是一种搜索优化算法，采用遗传算法求解非线性方程组的关键是

如何把方程组求解问题转化为函数优化问题，即构造求解非线性方程组的遗传算法模型。相比较于传统的解法，遗传算法用于非线性方程组求解时；具有以下优点：

(1) 具有大范围收敛性质，对初始点没有任何要求与限制，而且只要有解存在，总能以概率 1 求得方程组的解；

(2) 具有通用性，既可以求解非线性方程，也可以求解非线性方程组，无需给出各个解所在范围,依次能求出所有的解；

(3) 不要求组成方程的函数连续、可导，可求解常规算法难以求解的超越方程组。

但是，遗传算法的不足之处是计算效率不太理想。在刚开始进化的时候，种群的适应度函数曲线收敛速度很快，随着遗传代数的不断增加，种群朝着最优个体适应度收敛的速度会迅速下降，导致在一定遗传代数之后，种群的适应度变化很缓慢，需要很长时间才能进化到最优个体，计算效率在后期很不理想。

6.4.3 牛顿—拉夫逊算法和遗传算法计算结果有效性分析

由牛顿—拉夫逊算法和遗传算法求得的结果如表 6 所示，第一行为牛顿——拉夫逊算法求得的结果，第二行是由遗传算法求得的结果。

表 6 牛顿——拉夫逊算法和遗传算法求得的结果

$x_1 (n_H)$	$x_2 (Z_{CL})$	$x_3 (Z_{CDFs})$	$x_4 (Z_{CH})$	$x_5 (T_4^*)$	$x_6 (Z_{TH})$	$x_7 (Z_{TL})$
0.950	0.541	0.451	0.306	1700	0.201	0.14
0.919	0.455	0.477	0.293	1800	0.172	0.1

牛顿-拉夫逊法和遗传算法求得结果代入残差方程得到残差值分别为 1065.2144、924.1565。

在遗传算法中，适应度是描述个体性能的主要指标。根据适应度的大小，对个体进行优胜劣汰，适应度是驱动遗传算法的动力。适应度函数也被称为评价函数，是根据目标函数确定的用于区分群体中个体好坏的标准，总是非负的。因为适应度函数的复杂度是遗传算法复杂度的主要组成部分，所以适应度函数的设计应尽可能简单，使计算的时间复杂度最小，遗传算法评价一个解的好坏不是取决于它的解的结果，而是取决于该解的适应度值，这正是体现了遗传算法“优胜劣汰”的特点。

由图 9 的适应值变化图可以看出，适应度随着进化代数的增加越来越低，即公式 (6.27) 中 $f(x)$ 的值越来越小。适应度值已经降低到 1000 以下，相对于功率来说通过该算法求得的结果有了很大的提高。

在适应函数值为分别为 1065.2144 和 924.1565 时，2 种算法求得了非线性隐式方程组的满意解，均在合理范围之内，且满足题中给出的平衡方程。只是牛顿—拉夫逊法需运行多次才能得到最优解，而遗传算法只要存在每次都可以得到最优解，运行速率不佳。

6.4.4 求解方程算法的改进

根据遗传算法和牛顿—拉夫逊算法的优缺点，可以将两种方法相结合，避免遗传算法计算效率低和牛顿—拉夫逊算法容易局部收敛的不足，高效快速的求出最优解。算法的具体步骤为：

(1) 采用遗传算法产生初始种群，经过选择、交叉、变异等操作，不断产

生新种群，刚开始进化的时候，种群向高适应度方向的快速收敛，当进化到 G 代数后，停止进化，按照精英选择法则选择适应度的 N 个个体。

(2) 将 N 个个体作为初始值，按照牛顿—拉夫逊的迭代法则，求出 N 个有化解，最后从中选择最优解。

有效性说明：开始采用遗传算法求解 N 个个体，不仅对初始值的选取没有任何要求，而且收敛速度也很快，求出的 N 个个体采用精英选择法则选取的，适应度最高，更接近于最优解。以这些在最优解附近的个体作为牛顿—拉夫逊算法的初始值，避免了由于初始值设计不合理而陷入局部最优解，所以很容易得到全局最优解，同时收敛速度很快。

7 单涵道模式下发动机性能最优模型的建立与求解

7.1 单涵道模式变循环发动机分析

在问题三中，给定发动机模式为单涵道。在单涵道模式下，选择活门关闭，后混合器关小到一定的位置，此时只有少量气体经主外涵道进入加力燃烧室。单涵道模式下，变循环发动机的工作原理与涡喷发动机一致。此时气流在发动机内的流动可由下图表示：

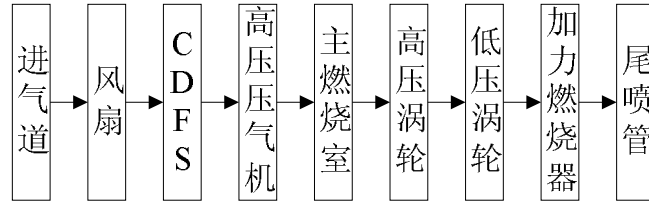


图 10 单涵道模式下气流在发动机内的流向

发动机工作时，外界空气经进气系统引入发动机，经压气机增压后进入燃烧室，在燃烧室中与供给的燃料混合并燃烧，形成高温高压的燃气，燃气在涡轮中膨胀，推动涡轮旋转，从而驱动压气机工作。燃气发生器燃气的可用能量全部用于在排气系统中增加燃气的动能，使燃气以很高的速度排出，以产生推力。

7.2 单涵道模式变循环发动机工作性能最优化模型的建立

7.2.1 确定多目标最优化函数

问题三要求发动机性能最优，而描述发动机性能的指标包括推力、单位推力和耗油率。既要满足发动机推力和单位推力最大又要满足发动机耗油率最小。

由附录 1 给出的发动机性能参数计算公式可得多目标最优化函数为：

$$\begin{cases} F = W_8 c_9 - W_a V + (p_9 - p_0) A_9 \\ F_s = F / W_a \\ sfc = \frac{3600 W_f}{F} \end{cases} \quad (7.1)$$

7.2.2 确定约束条件

变循环发动机在涡喷模式下，各部件的仿真数据仍然采用附录 1 给出的变循环发动机各部件的计算公式。由图 10 可以看出，问题中将喷管喉道面积设为变量，平衡公式中的 6) 尾喷管面积平衡在此不能适用。为保证发动机工作的

平衡，在涡喷模式下仍然需要满足其他的六个平衡方程。

(1) 低压轴功率平衡方程

$$N_{CL} - N_{TL}\eta_{mL} = 0 \quad (7.2)$$

(2) 高压轴功率平衡方程

$$N_{CH} + N_{CDFS} - N_{TH}\eta_{mH} = 0 \quad (7.3)$$

(3) 高压涡轮进口截面流量平衡方程

$$W_{g41} - W'_{g41} = 0 \quad (7.4)$$

(4) 低压涡轮进口截面流量平衡方程

$$W_{g45} - W'_{g45} = 0 \quad (7.5)$$

(5) 后混合器静压平衡

$$p_{61} - p_{62} = 0 \quad (7.6)$$

(6) 风扇出口流量平衡方程

$$W_{a2} - W_{a21} = 0 \quad (7.7)$$

在单涵道模式下，风扇出口的流量 W_{a2} 全部进入 $CDFS$ ，二者的气流流量相等。

7.2.3 综上所述，得到单涵道发动机性能多目标最优化模型

目标函数：

$$\begin{cases} \max F = W_8 c_9 - W_a V + (p_9 - p_0) A_9 \\ \max Fs = F / W_a \\ \min sfc = \frac{3600 W_f}{F} \end{cases} \quad (7.8)$$

约束条件：

$$s.t. \begin{cases} 0 < n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{CH}, Z_{TH}, Z_{TL} < 1 \\ T_4^* = 1700 \\ -5^\circ < \alpha_{CDFS} < 35^\circ \\ N_{CL} - N_{TL}\eta_{mL} = 0 \\ N_{CH} + N_{CDFS} - N_{TH}\eta_{mH} = 0 \\ W_{g41} - W'_{g41} = 0 \\ W_{g45} - W'_{g45} = 0 \\ p_{61} - p_{62} = 0 \\ W_{a2} - W_{a21} = 0 \\ -5^\circ < \alpha_{CH} < 15^\circ \end{cases} \quad (7.9)$$

7.2.4 模型的求解

由上述分析可知，该问题属于多目标优化模型求解问题，可以采用遗传算法进行求解。遗传算法求解多目标优化模型的步骤如下：

(1) 适应度函数的选定：本文优化目标为推力和耗油率，要求在耗油率低的情况下推力尽可能大。由于遗传算法中仅涉及数值计算，而且推力和耗油率在发动机性能计算程序结果的数量级分别在 10^5 和 10^{-2} 次上，为方便遗传算法求解，特涉及以下适应度函数：

$$f(x) = \min[1000 / F + sfc / 10] \quad (7.10)$$

加权后适应度函数即算法求解的目标函数为

$$f(x) = \min F(\bar{F}, \bar{sfc}, \lambda) = \min[\lambda \bar{F} + (1 - \lambda) \bar{sfc}] \quad 0 < \lambda < 1 \quad (7.11)$$

其中 $\bar{F} = 1000 / F$ ， $\bar{sfc} = sfc / 10$ ，以 $f(x)$ 函数值最大为适应值高。当 $\lambda = 1$ 时，即以推力为单目标优化；当 $\lambda = 0$ 时，以耗油率为单目标优化。 λ 取中间值时，为推力和耗油率的多目标优化。

终止准则采用计算步数和适应值最大和最小值的差值来共同判断是否终止计算。计算步数不少于 200 步，这样是为了防止适应值最大、最小值的差值在某些代较小引起的误判。也可以设置最大步数，这可由所优化的问题复杂程度决定。最大、最小值的差值判断由下式：

$$|f_{\max}(x) - f_{\min}(x)| \leq \varepsilon \quad (7.12)$$

当差值小于 ε 时，程序终止。

(2) 约束条件的选定：

$$s.t \begin{cases} 0 < n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{CH}, Z_{TH}, Z_{TL} < 1 \\ T_4^* = 1700 \\ -5^\circ < \alpha_{CDFS} < 35^\circ \\ \min f(x) = \sum_{i=1}^7 |e_i| \end{cases} \quad (7.13)$$

(3) 多目标优化模型用遗传算法进行求解的步骤：

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)$ ，显然，若方程组(7.8)有解，则加权后的适应度函数(7.11)取得最小值，根据实际情况，推力、单位推力、耗油率均为正值，则有如果求得的适应度函数的值越接近于0，那么对应的方程组(7.8)的解就越精确。

确定变量的范围：由于7个方程对应7个自变量，所以选择将根据题中给出的说明确定 x 的搜索范围， $x_1 \in (0, 1)$ ， $x_2 \in (0, 1)$ ， $x_3 \in (0, 1)$ ， $x_4 \in (1700, 2000)$ ， $x_5 \in (0, 1)$ ， $x_6 \in (0, 1)$ 。

由问题三可知单涵道模式下变循环发动机可调几何部件主要包括：核心驱动风扇级导流叶片角度 α_{CDFS} 、低压涡轮导叶角度 α_{CH} 和喷管喉道面积 A_8 。在超声速巡航模式下，飞行高度为 $H = 11km$ ， $Ma = 1.5$ 时，该题为多目标优化求解问题，为了结果的更优化，特将该目标方程的主燃烧室出口温度设为 $T_4^* = const = 1700$

然后对加权后的最优化目标方程(7.11)采用遗传算法进行求解。遗传算法步骤如6.3所示。得到遗传算法进化过程图见图11

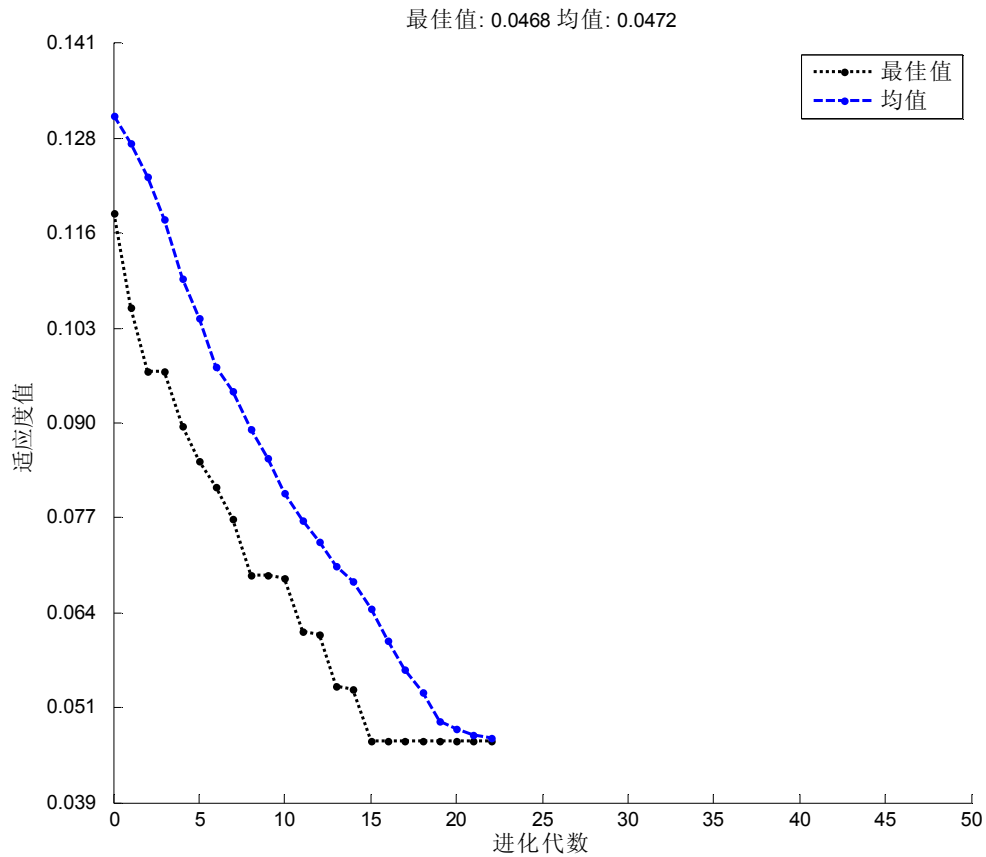


图 11 马赫=1.5 时遗传算法进化过程图
马赫值为 1.5 时运行遗传算法求得发动机性能最优时的满意解如表 7 所示

表 7 马赫值为 1.5 时发动机性能最优时的满意解

Ma	α_{CDFS}	α_{CH}	A_8	F	Fs	scf
1.5	-5	2.78	$9.51e+3$	12458	715.15	0.1329

7.2.5 结果分析

通过图 11 可以看出，该算法在进行进化代数达到 23 代左右之后，适应度值的最佳值和均值趋于一致。通过 7.2.4 遗传算法计算的结果可以看出马赫数值为 1.5 时发动机性能最优状态下，用遗传算法求得发动机性能最优时的满意解。此时，发动机推力较大且耗油率较低，中各指标在约束条件范围之内，符合发动机运行的平衡条件，且为发动机超音速巡航提供了推力和燃油两方面的保证。

分析该组最优解数值可知：

- （1）CDFS 导叶角在超音速巡航时需要导叶角为负值，为发动机燃烧室提供较多的空气进入核心机，以产生较大的推力，保证飞行速度；
- （2）在超音速巡航状态下低压涡轮的的导叶角为正值，以提高风扇的的转速，进而提高进气道的进气量增加，从另一方面为核心机提供较多的空气，保证了超音速巡航状态。

由变循环发动机工作原理可知，核心驱动风扇级导流叶片的调节在模式转换过程中也扮演了重要的角色；尾喷管喉道面积是发动机几何调节的主要手段，对涡轮功、风扇工作点以及涵道比大小影响是显著的。

8 飞行马赫数变化时发动机性能最佳参数研究

8.1 问题背景分析

本题中要求研究在飞行高度 $H=11\text{km}$ ，飞行马赫从 $Ma=1.1$ 变化到 $Ma=1.6$ ，发动机特性最优时， $CDFS$ 导叶角度、低压涡轮导叶角度，尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律。当发动机的飞行马赫数 >1 时，飞机处于超音速巡航状态，发动机采用单涵道模式运行，活门为关闭状态，将其面积设置为 0，风扇导叶角度、高压压气机导叶角度、高压涡轮导叶角度均设置为 0。该题与第三题第 1 小问相比，该题马赫数设为变值，且后混合器内外涵道的面积值可调。

发动机性能参数主要有推力、单位推力和耗油量，要研究发动机特性最优时的 $CDFS$ 导叶角度、低压涡轮导叶角度，喷尾管喉道面积随飞行马赫数的变化规律，即要求得在不同马赫数时，以发动机推力、单位推力和耗油量达到最优为目标，求得满意解条件下的 $CDFS$ 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷尾管喉道面积，最终得到它们随飞行马赫数的变化规律。

由此可见，问题三第 1 小问为第 2 小问的简化形式。由于遗传算法求解多目标最优化模型的复杂性，再多一个变量，程序求解的效率会大大降低。因此本文特将马赫数选取定值 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 分别进行求解发动机性能最优时的三个指标，求解的模型、约束条件及过程与第 1 小问一致。

8.2 马赫数在 $[1.1, 1.6]$ 范围内变化时的目标函数：

$$\begin{cases} \max F = W_8 c_9 - W_a V + (p_9 - p_0) A_9 \\ \max Fs = F / W_a \\ \min sfc = \frac{3600 W_f}{F} \end{cases} \quad (7.14)$$

约束条件：

$$s.t. \begin{cases} 0 < n_L, n_H, Z_{CL}, Z_{CDFS}, Z_{CH}, Z_{TH}, Z_{TL} < 1 \\ T_4^* = 1700 \\ -5^\circ < \alpha_{CDFS} < 35^\circ \\ N_{CL} - N_{TL} \eta_{mL} = 0 \\ N_{CH} + N_{CDFS} - N_{TH} \eta_{mH} = 0 \\ W_{g41} - W'_{g41} = 0 \\ W_{g45} - W'_{g45} = 0 \\ p_{61} - p_{62} = 0 \\ W_{a2} - W_{a21} = 0 \\ -5^\circ < \alpha_{CH} < 15^\circ \\ 1.1 \leq Ma \leq 1.6 \end{cases} \quad (7.15)$$

8.3 问题求解

基于 7.2.4 的模型，运用遗传算法求解马赫数为从 1.1 到 1.6 变化时，发动机处于特性最优时，*CDFS* 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷气管喉道面积的取值，得到马赫数为 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 时，对应适应度函数随遗传算法进化代数的曲线图 12、图 13、图 14、图 15、图 16、图 17。

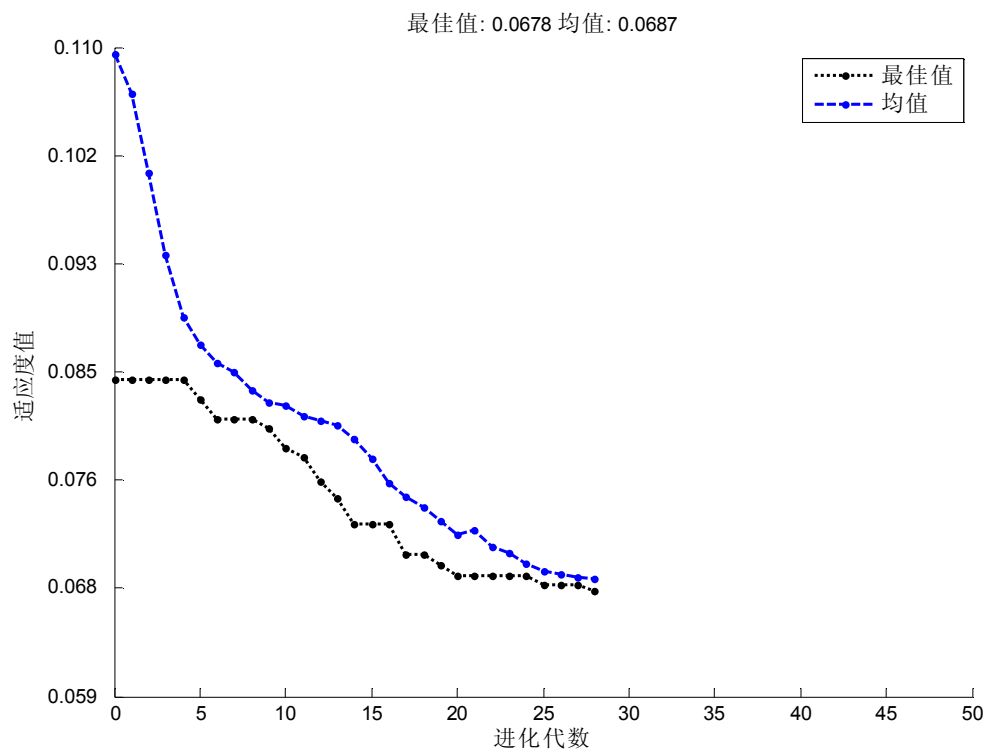


图 12 马赫=1.1 时遗传算法进化过程图

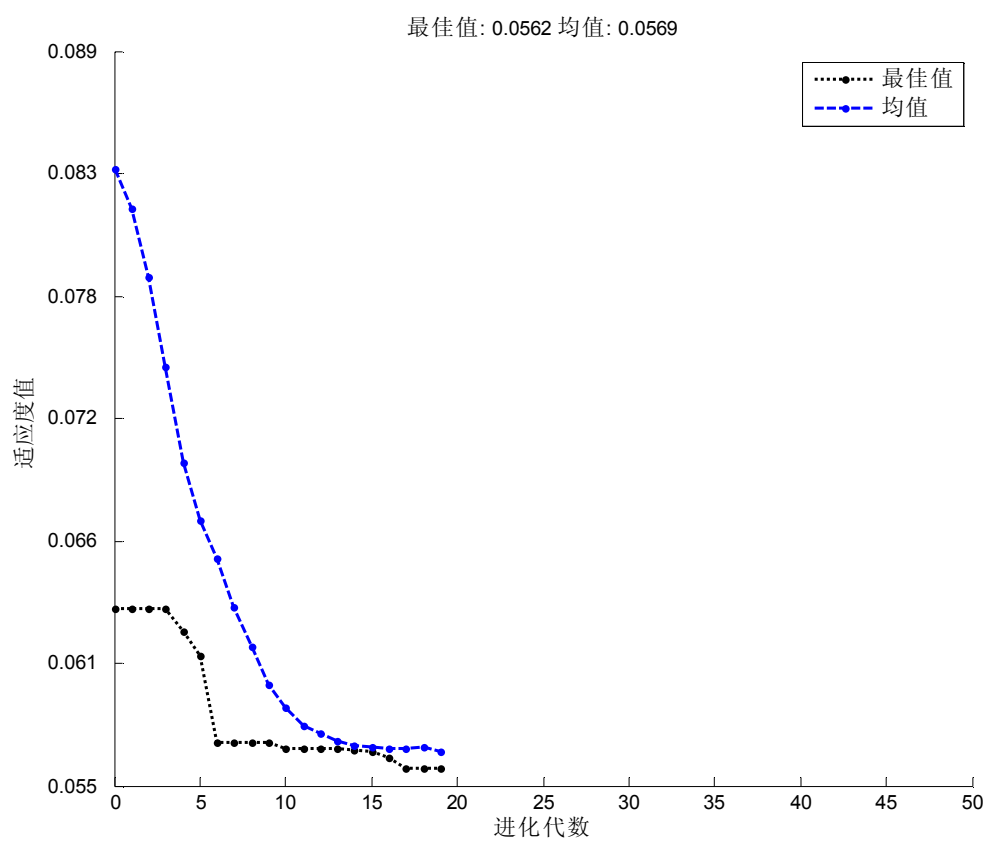


图 13 马赫=1.2 时遗传算法进化过程图

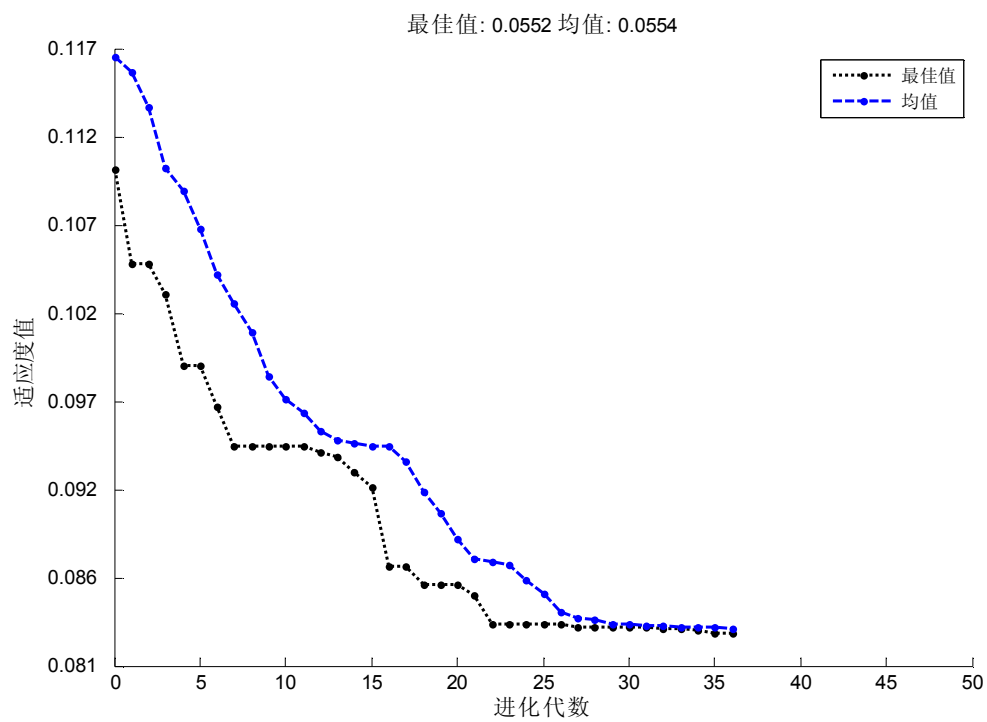


图 14 马赫=1.3 时遗传算法进化过程图

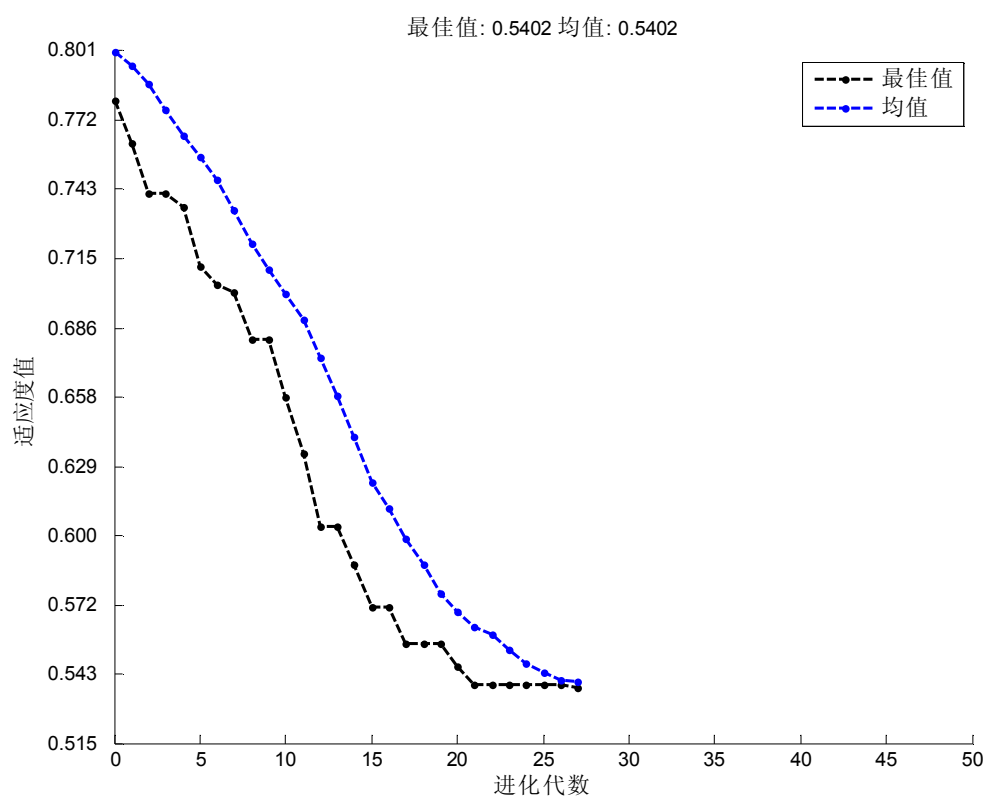


图 15 马赫=1.4 时遗传算法进化过程图

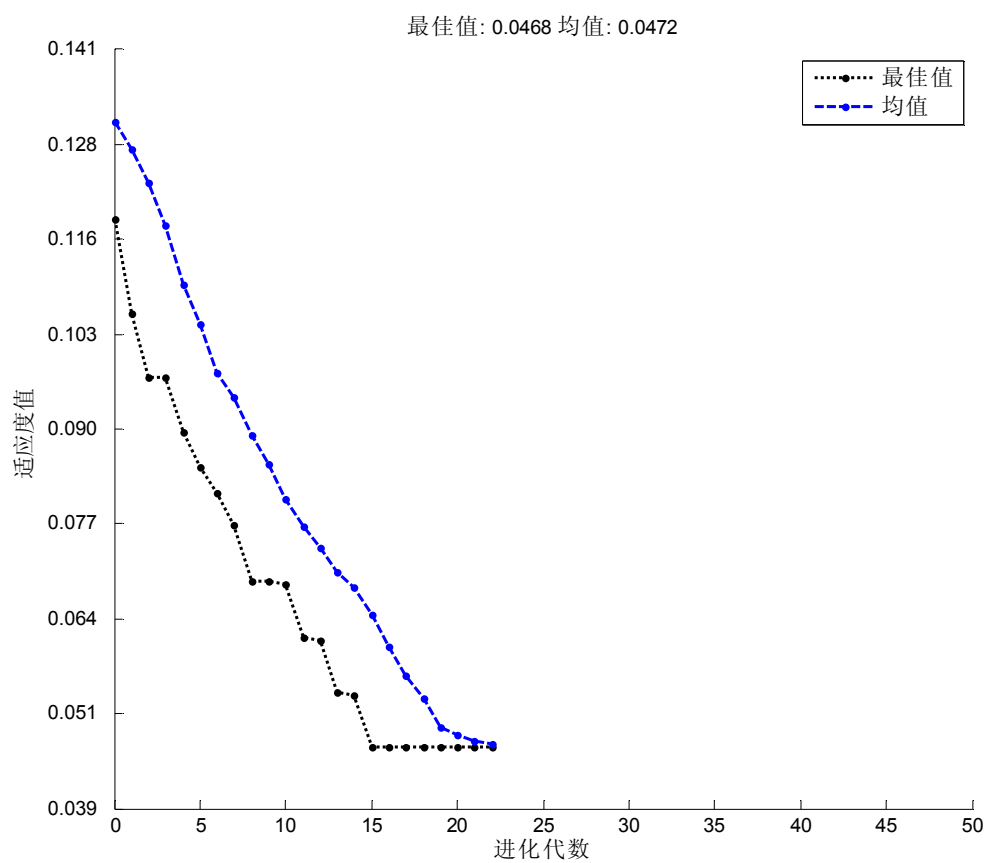


图 16 马赫=1.5 时遗传算法进化过程图

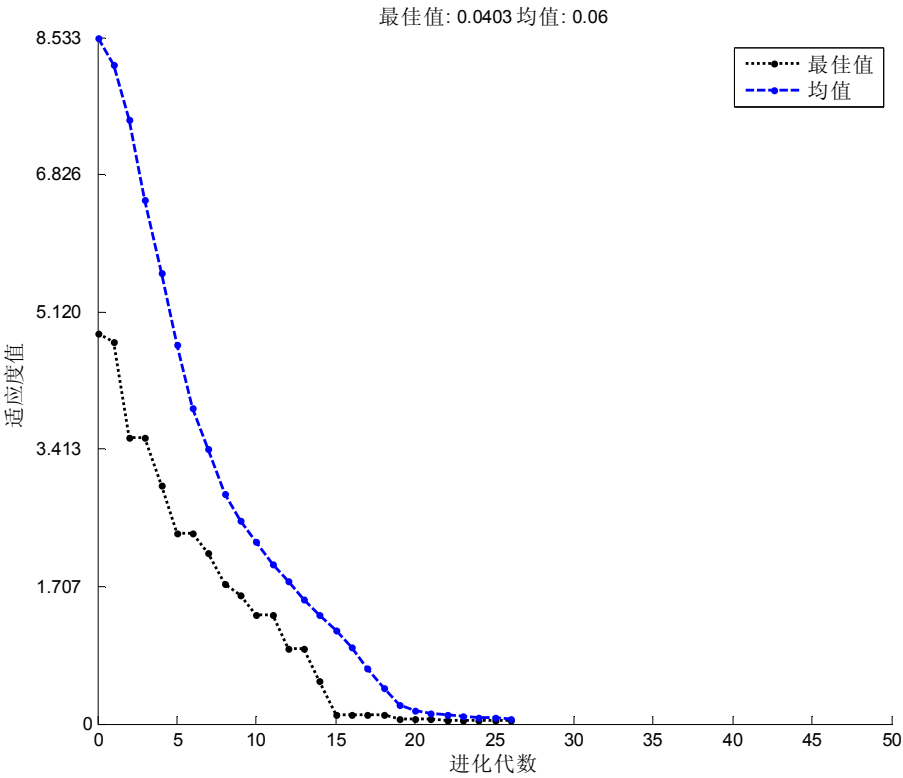


图 17 马赫=1.6 时遗传算法进化过程图

不同的飞行马赫值运行遗传算法求得发动机性能最优时的满意解如表 7 所示:

表 6 马赫数变化时发动机性能最优解

Ma	α_{CDFS}	α_{CH}	A_8	F	F_s	scf
1.1	-4.89	-0.3600	9.53×10^3	9557.3	719.8540	0.1551
1.2	-3.55	-0.8430	9.63×10^3	10292	720.1292	0.1516
1.3	-4.95	0.3930	9.51×10^3	10507	695.1700	0.1520
1.4	-4.99	-4.9900	9.54×10^3	9405.8	612.7537	0.1730
1.5	-5.00	2.7800	9.51×10^3	12458	715.1500	0.1329
1.6	-4.69	6.0300	9.56×10^3	14492	752.7750	0.1164

根据表 6 的数据画出 $CDFS$ 导叶角、低压涡轮导叶角、尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律见图 18-20。

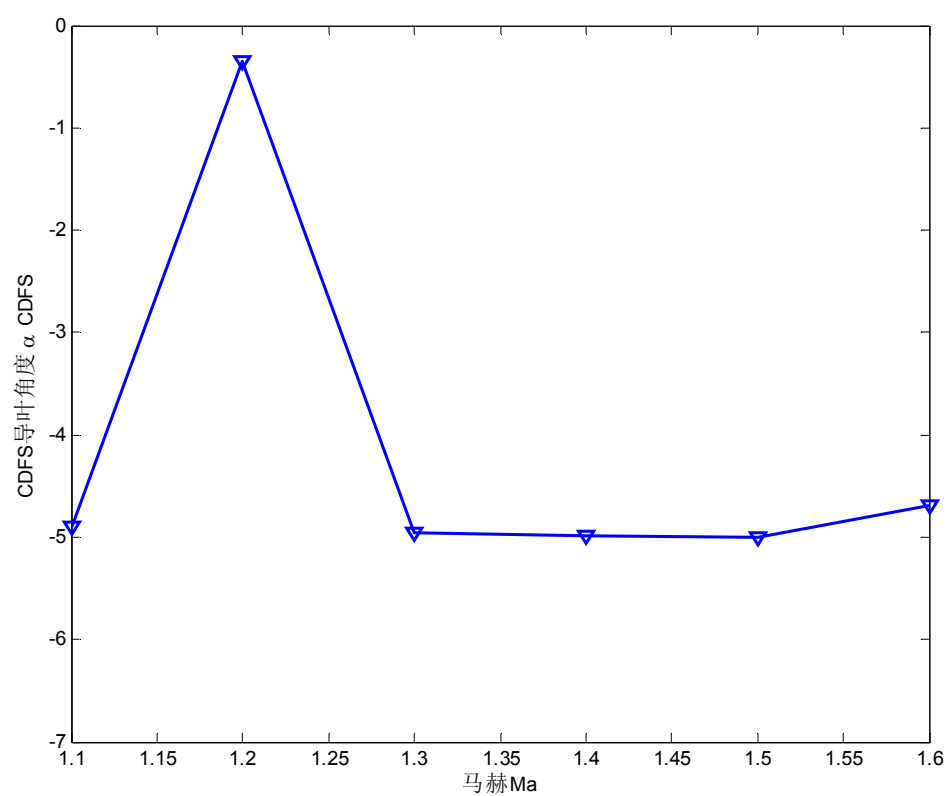


图 18 *CDFS* 导叶角随马赫数增加而变化图像

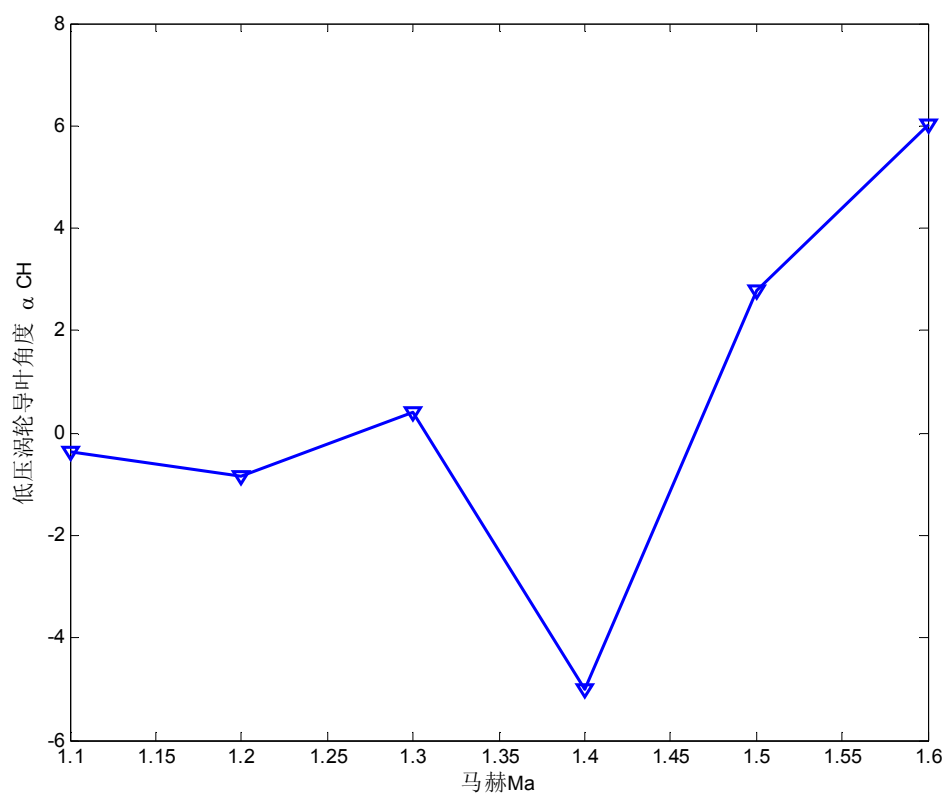


图 19 低压涡轮导叶角随马赫数增加而变化图像

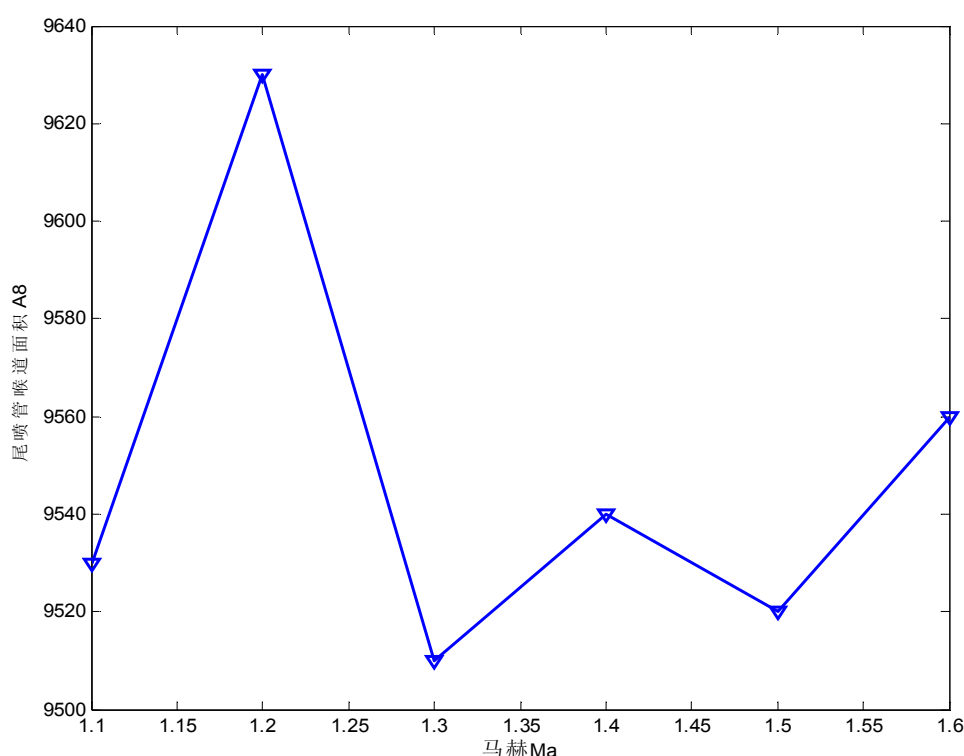


图 20 尾喷管喉道面积随马赫数增加而变化图像

8.4 结果分析

由表 6 不同马赫数的发动机性能最优解以及 *CDFS* 导叶角、低压涡轮导叶角、尾喷管喉道面积随马赫数增加而变化趋势由图 18-20 可以看出，发动机性能达到最优时，各变量变化没有明显的一致规律，*CDFS* 导叶角、低压涡轮导叶角、尾喷管喉道面积随着马赫数的增大，变化趋势比较多变。为了获得理想的目标函数就必须要在一定的约束条件下进行多变几何部件组合调节。

虽然 *CDFS* 导叶角、低压涡轮导叶角、尾喷管喉道面积的变化没有一致规律，单各个指标的不同的马赫下会呈现一定的数值变化趋势：

- (1) *CDFS* 导叶角 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 马赫状态下导叶角的值大致相同在-5 左右，而与 1.2 马赫时的导叶角趋近零；
- (2) 低压涡轮导叶角若不考虑 1.4 马赫的下降趋势，整体呈上升趋势；
- (3) 尾喷管的面积在不同马赫下呈现明显的波动；
- (4) 综合分析 3 个图形可知，马赫为 1.2 时的各参量与其他参量差异较大。

9 模型的评价、改进及推广

9.1 模型的评价

优点

(1) 对问题一进行求解，计算风扇和 *CDFS* 的出口总温、总压和流量的过程中，严格按照文中所提供的相关热力守恒和功能守恒定律，精确推导，尤其在对换算转速和压比函数值一定的情况下，利用线性插值法计算增压比、效率和换算流量时，充分考虑了线性内插值和线性外差值两种情况，保证了预测数据的准确性，计算结果令人满意。

(2) 在求解问题二的 7 个平衡方程组成的非线性方程组的过程中，首先将

多目标采用“乘除法”转化为单目标函数，以平衡方程左侧表达式的误差的绝对值之和为目标，并将各量转化为了发动机设计中各部件参数表示的形式，将复杂模型简单化，利于求解。

(3)求解模型时，采用遗传算法和牛顿—拉夫逊法相结合的改进遗传算法，避免了遗传算法搜索效率不高和牛顿—拉夫逊法易搜索到局部解的不足，较为高效快速的求得问题的最优解。

缺点

(1) 将多目标优化转换为单目标优化问题时，只是凭借经验将多目标中的各个函数进行了简单的线性加权，没有严格理论证明目标函数的通用性，根据飞行器发动机要求的不同，加权方法也应该相应变化，本文没有做出深入研究。

(2) 建模过程中，发现设计点的选取对发动机后续建模影响较大，甚至对优化结果起到决定性作用，而本文初始点的选择主要依据参考文献，不可避免的产生了误差。

9.2 模型的改进

(1) 变循环发动机部件法建模及优化以热力守恒和功能守恒为理论依据，但是没有考虑到飞机发动机在实际情况中受到的各种外在因素，如：风雨、云雾等天气的影响，下一步研究应充分考虑具体情况。

(2) 发动机的某些性能有具体约束要求，如 $SM_F \geq 10\%$ ， $SM_{cdfs} \geq 10\%$ ，

$SM_c \geq 20\%$ 等，在后续的优化过程中，应充分考虑这些因素的影响。

9.3 模型的推广

本文中建立的基于变循环发动机部件的数学建模及优化，仅适用于变循环发动机不同工作状态中相关参数的求解。在本模型的求解过程中运用的相关算法，如采用改进型遗传算法求解多目标优化问题，高效快速地求解了的复杂多目标问题，具有较大的实际意义。因此，该算法可以推广应用于一些实际问题的求解，如一些论文中利用该方法实现农作物害虫发生系统的预测、小麦抗倒伏理想植株模型的求解、涡轮汽车发动机部件建模研究等问题。

10 参考文献

- [1]张志涌,精通 Matlab6.5 版[M],北京:北京航空航天大学出版社,2003.
- [2]Kurzke J.Gasturb 10 technical reference[M],Dachau,Germany: Gasturb Company,2004.
- [3]苟学中,变循环发动机建模及控制规律研究[D],南京航空航天大学, P45~P47,2011.
- [4]廉筱纯,吴虎,航空发动机原理[M],西安:西北工业大学出版社,2005.
- [5]苏三买,遗传算法及其在航空发动机非线性数学模型中的应用研究[D],西北工业大学, P61~P65,2002.
- [6]陈秋莲,基于 *Matlab* 遗传算法工具箱的优化计算实现[J],现代电子技术,第 2 期 P124~P129, 2007.
- [7]尹大伟,航空发动机模型求解算法及性能寻优控制中的参数估计研究[D],国防科学技术大学研究生学院, P145~P147,2011.
- [8]苏三买,遗传算法在航空发动机非线性数学模型中的应用[J],推进技术,第 25 卷第 3 期: P237~P240, 2004.
- [9]杨伟,冯雷星,彭靖波等,求解航空发动机数学模型的混合智能方法[J],推进技术,第 29 卷第 5 期: P614~616, 2008.
- [10] 苟学中,周文祥,黄金泉,变循环发动机部件级建模技术[J],航空动力学报,第 28 卷第 1 期: P104~P111, 2013.
- [11]丁世飞,苏春阳,基于遗传算法的优化 BP 神经网络算法与应用研究[J],Proceeding of the 29th Chinese Control Conference,July 29-31, Beijing,China, 2010.