

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校 三峡大学

参赛队号 11075007

	1.李登桥
队员姓名	2.杨志成
	3.余竹玛

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 变循环发动机部件法建模及优化

摘 要:

本文主要研究了变循环发动机部件法建模及优化问题,首先根据发动机七个平衡方程构建了描述发动机特性的非线性数学模型,运用改进的牛顿迭代法求解模型,并通过建立有效性评价指标验证算法的合理性。针对发动机性能最优化问题,建立了发动机性能寻优模型,应用遗传算法进行求解,分析得到发动机特性最优时,CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度,尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律。

对于问题一:首先根据增压比和压比函数值之间的数学公式,计算得到风扇特性数据表中流量和压比函数值之间的对应关系,进而画出流量随压比函数值变化图形(见图 3)。然后通过发动机各部件计算公式,推导得到风扇和 CDFS 出口总温,总压和流量的计算模型,并在已知飞行高度、马赫数等初始条件下,最终计算得到风扇和 CDFS 出口参数值,最后对计算结果进行分析得到:气体从风扇到 CDFS 传输过程中由于压缩做功,其总温和总压有一定的升高,由于分流或泄漏使流量有一定的减少。计算结果如下表:

位置/结果	总温	总压	流量
风扇出口	380.06	1.31	19.05
CDFS 出口	477.45	1.80	17.14

对于问题二:首先将发动机 7 个平衡方程构成的非线性方程组等价转化为误差方程,然后建立了以误差平方和为目标函数的最优化模型,并应用牛顿迭代法对模型进行求解。针对部件级模型建立和求解过程中由于二维插值和求解非线性方程会产生较大误差的问题,通过对压气机特性数据进行重构和独立变量的无因次化方法降低了求解误差。针对算法有效性问题,以平均误差率为有效性评价指标,选取五组值作为验证集,得到平均误差率为 $\overline{EMS} = 0.0046$,其值在要求精度之内,进而验证其算法是有效的。其中最优化模型的其中一组解为: 0.63, 0.66, 0.46, 0.52, 0.58, 0.64, 0.67, 1220。(详见表 5)

对于问题三：在研究发动机性能最优化问题时，首先将发动机性能优化问题描述为多目标非线性规划问题，建立了以发动机推力最大，单位推力最大和耗油量最小为目标函数的多目标非线性优化模型，然后采用遗传算法对模型进行求解。并得到发动机性能最优时相应的 CDFS 导叶角，低压涡轮导叶角和喷管喉道面积的值。由于是多目标优化问题，求解得到一系列的非劣解。其中的一个近似最优解为： $\alpha_{CDFS} = 8.33$ ， $\alpha_{CH} = 15$ ， $A_8 = 9221.07$ 。(详见表 9)

当发动机特性最优时，研究 CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度，尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律，首先根据已经建立的发动机寻优模型，通过遗传算法求解得到不同飞行马赫条件下各参变量的值，然后通过数值分析拟合得到这三个参变量随马赫变化规律的曲线。并得到以下结论：

- (1) CDFS 导叶角在一定范围内随着马赫数的增大而增大。
- (2) 低压涡轮导叶角在一定范围内随马赫数的增大而增大。
- (3) 喷管喉道面积的值在一定范围内和马赫数近似的成正线性关系。

关键词：牛顿迭代法 遗传算法 多目标优化模型 非线性方程组

一 问题重述

1.1 问题背景

通过对飞机/发动机设计原理的分析,得知在需要进行持续且高马赫数的飞行任务时,需要高单位推力的涡喷循环。反之,如果强调低马赫数和长航程,就需要低耗油率的涡扇循环。其中,当任务兼有超声速飞行和亚声速飞行或存在多设计点时,问题就变得复杂,此时双涵道变循环发动机有着其特殊的优势。而变循环发动机的高效运行是建立在各部件性能良好的基础上的,因此首先准确模拟发动机各部件的发动机性能,然后通过改变循环参数来实现对变循环发动机的优化就显得尤为重要。

1.2 已知信息

变循环发动机的两种工作模式:涡喷模式和涡扇模式。前者主要用于发动机在亚音速巡航的低功率工作状态,后者主要用于发动机在超音速巡航、加速、爬升状态。

双涵道变循环发动机的主要部件有:进气道、风扇、副外涵道、CDFS涵道、核心驱动风扇级(CDFS)、主外涵道、前混合器、高压压气机、主燃烧室、高压涡轮、低压涡轮、后混合器、加力燃烧室、尾喷管。

变循环发动机部件建模法:燃气涡轮发动机是由进气道、压气机、主燃烧室、涡轮、喷管等部件组成的。如果计算机能够对这些部件的性能进行准确的模拟,那么也就能准确地模拟整个发动机的性能。这种建立在准确模拟发动机各部件性能基础上的发动机性能计算方法,称为部件法。

发动机各部件匹配中的7个平衡:低压轴功率平衡,高压轴功率平衡,高压涡轮进口截面流量平衡,低压涡轮进口截面流量平衡,后混合器静压平衡,尾喷管面积平衡,风扇出口流量平衡。

1.3 需要解决的问题

问题一:

(1) 画出附录4中风扇特性数据表中流量随压比函数值变化的图形。

(2) 设在发动机飞行高度 $H=11\text{km}$, 飞行马赫数 $Ma=0.8$ 的亚音速巡航点, 导叶角度均设置为 0° , 风扇和 CDFS 的物理转速都为 0.95, 风扇和 CDFS 的压比函数值都为 0.5, 求风扇和 CDFS 的出口总温、总压和流量。

问题二:

设在发动机飞行高度 $H=11\text{km}$, 飞行马赫数 $Ma=0.8$ 的亚音速巡航点, 采用双涵道模式, 导叶角度均设置为 0° , 选择活门完全打开, 副外涵道面积设为 $1.8395\text{e}+003$, 后混合器出口总面积设置为 $2.8518\text{e}+004$, 尾喷管喉道面积 $A_g=9.5544\text{e}+003$, $n_L=0.85$ 。运用或设计适当的算法求解由发动机7个平衡方程组成的非线性方程组。陈述算法的关键步骤及其解释,尽可能讨论算法的有效性。

问题三:

(1) 设在发动机飞行高度 $H=11\text{km}$, 飞行马赫数 $Ma=1.5$ 的超音速巡航点, 发动机采用单涵道模式, 将选择活门面积设置为 0, 风扇导叶角度、高压压气机

导叶角度、高压涡轮导叶角度均设置为 0° ，后混合器面积设置为 $2.8518\text{e}+004$ 。求解发动机 CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积 3 个量为多少时，发动机的性能最优。

(2) 试研究发动机飞行高度 $H=11\text{km}$ ，飞行马赫数从 $Ma=1.1$ 变化到 $Ma=1.6$ ，发动机特性最优时，CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度、尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律。此时发动机采用单涵道模式，将选择活门面积设置为 0，风扇导叶角度、高压压气机导叶角度、高压涡轮导叶角度均设置为 0° ，后混合器出口总面积设置为 $2.8518\text{e}+004$ ，后混合器内、外涵道面积可调。

二 问题假设及符号说明

2.1 问题假设

假设一：进风道出口与风扇进口的温度和压强相等。

假设二：风扇出口与 CDFS 进口的温度和压强相等。

假设三：忽略燃油在燃烧室中燃烧延迟的影响。

假设四：忽略高温气体与发动机结构部件的热交换。

2.2 符号说明

符号	含义
n_L	低压转速（风扇、低压涡轮物理转速）
n_H	高压转速（高压压气机、CDFS、高压涡轮物理转速）
Z_{CL}	风扇压比函数值
Z_{CDFS}	CDFS 压比函数值
Z_{CH}	高压压气机压比函数值
T_4^*	主燃烧室出口温度
Z_{TH}	高压涡轮压比函数值
Z_{TL}	低压涡轮压比函数值
α_L	风扇导叶角
α_{CDFS}	CDFS 导叶角
α_H	高压压气机导叶角
α_{CH}	低压涡轮导叶角
zz	压比函数值
Ma	马赫数
n_{cor}	换算转速
N_{CL}	风扇消耗功率
N_{TL}	低压涡轮发出功率
N_{CH}	高压压气机消耗功率
N_{CDFS}	CDFS 消耗功率

N_{TH}	高压涡轮发出功率
F	发动机推力
F_s	发动机单位推力
sfc	发动机油耗率

三 问题分析

本文研究的是变循环发动机进行部件法建模及优化问题,通过对多个部件进行调节,在较大范围内改变涵道比,能够使发动机在不同航段分别实现涡喷发动机的高推力和涡扇发动机的低油耗性能。针对三个问题,分析如下:

问题一的分析

题目要求画出附录4中流量随压比函数值变化的图形,并根据已知条件计算风扇和CDFS的出口总温、总压和流量。由于附录四给出了风扇特性,即在不同换算转速下增压比与流量的数据对应关系,因此可通过增压比与压比值的函数关系来求得压比值。从而得到流量与压比函数值的对应关系,然后运用 $matlab$ 软件,绘制流量随压比函数值变化的图形。

由变循环发动机的基本结构可知,欲求得风扇出口的总温,总压及流量,可先求得风扇进口的总温,总压及流量,由于不能确切求出进风道出口与风扇入口间的温度压强的变化。可假设风扇进口与进风道出口的温度压强相等,因此可通过求进风道出口的温度压强从而算得风扇进口处的。通过计算换算转速得到压比值,然后对其进行线性差值得到增压比,效率和换算流量,之后对这三个量进行修正,得到风扇出口的总温,总压及流量。

CDFS位于风扇之后,欲求CDF出口口的总温,总压及流量,可用同样的思路,由于上面已经求得风扇出口处的温度和压强,可假设风扇出口的温度和压强与CDF进口处相等,得到CDF进口处的温度压强。计算CDF的换算转速得到压比值,通过对其线性差值得到增压比,效率和换算流量,之后修正这三个量,得到CDF出口的总温,总压及流量。并对所求的结果进行分析。

问题二的分析

题目要求运用或设计适当的算法求解由发动机 7 个平衡方程组成的非线性方程组,得到发动机的各参数值,并讨论算法的有效性。非线性方程组的求解存在着较大的困难,常用的方法是将问题转化为最优化问题,然后应用常用的算法对最优化模型进行求解。

其中常用的求解非线性方程组的方法有迭代法和现代优化算法,这些方法在求解这类问题过程中,有着各自的优点,考虑到迭代法就有运算效率高的特点,所以可以将牛顿-拉夫逊迭代法来进行发动机特性模型的求解。首先将问题转化为残差和最小的最优化问题,然后采用该算法对问题进行求解。

针对算法有效性的验证问题,建立相应的有效性评价指标,将计算得到的多组解求其累计误差率,然后通过比较累计误差率的大小,判定此算法的有效性。

问题三的分析

题目要求确定合适的 CDFS 导叶角度，低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积，以使发动机的性能最优。对于发动机的性能优化问题，就是要在给定的条件下寻找最优的主燃油量控制量、尾喷管面积、风扇导叶角等控制量，使发动机的某个或几个性能组合指标达到最优。在问题所给的超音速巡航条件下，发动机需要较大的推力，发动机性能最优状态就是要在满足约束条件的前提下，使发动机最优目标函数即推力达到最大且耗油率最低。基于此，建立发动机性能多目标优化数学模型。考虑到飞机和发动机的各种信息，在发动机安全运行的前提下，以发动机稳定运行的 7 个平衡条件为约束条件，对这类复杂多目标优化模型进行求解可以采用遗传算法，而传统遗传算法存在早熟现象，在最优解附近存在摆动问题，局部搜索能力不足等缺点。因此，本文欲采用一种改进的遗传算法对发动机性能多目标优化模型进行求解。这种算法增强了其局部探索能力。所以可以得到最优解，在求解出发动机性能最优时的各个参数后，对多个结果进行分析。

问题四的分析

题目要求在发动机特性最优的前提下，研究 CDFS 导叶角度，低压涡轮导叶角度，尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律。要分析他们的变化规律，必须首先计算得到在不同条件下这两个马赫数之间性能参数的大小，而在问题三中已经建立了发动机性能寻优模型。因此，在问题三所建立的性能寻优模型基础之上，求解此模型，得到当发动机在给定高度 H 和飞行马赫数 Ma 变化的情况下，使得发动机性能最优时，CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积这 3 个量的值。通过分别计算得到在飞行高度 $H=11\text{Km}$ ，飞行马赫数由 $Ma=1.1$ 到 $Ma=1.6$ 变化的一系列相应参变量的数值，通过这多组值的相应变化，分析其变化规律。

四 问题一的解答

4.1 发动机基本结构分析

4.1.1 变循环发动机的构成

对于双涵道变循环发电机而言，它的结构主要包括：模式转换活门，前混合器（前 VABI），后混合器（后 VABI），核心驱动风扇级（CDFS）等。如下图 1

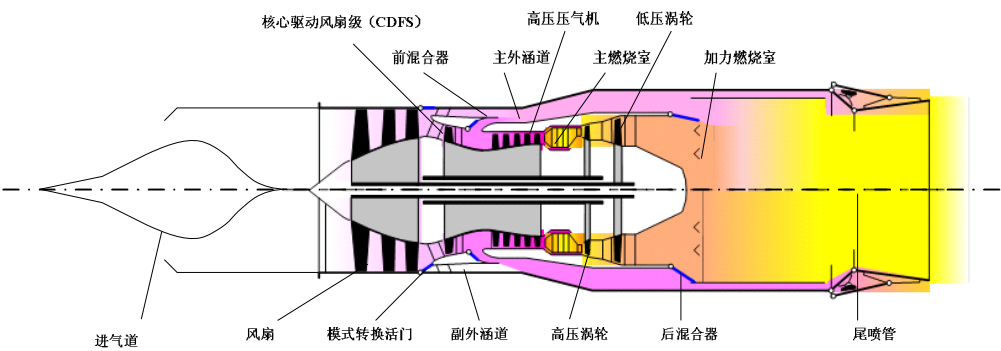


图 1 变循环发动机的基本构造

以上主要结构在发动机中都有着特有的功能^[1]，见表 1：

表 1 变循环发动机主要部件的功能

模式转化活门	确定发动机以单涵还是双涵模式工作
前混合器(前 VABI)	控制流入压气机的流量，在前后风扇间放气，控制前风扇的失速裕度
后混合器(后 VABI)	改变后混合室外涵出口气流的马赫数，保证主涵道出口气流与核心机出口气流掺混时静压平衡
核心驱动风扇级 (CDFS)	合理安排高，低压涡轮功的分配，充分利用高压涡轮做功的能力。

4.1.2 变循环发动机的工作模式

定义 1：涵道比——涡轮风扇发动机的外涵道和内涵道的空气流量的比值。

变循环发动机在实际工作中，根据不同的需求，通过对模式选择活门，前 VABI，后 VABI 的控制，具有两种典型的工作模式：单涵道模式和双涵道模式。如图 2。其中双涵道模式相比单外涵模式具有更大的涵道比，在亚声速巡航下双外涵模式可以提供更小的耗油率，而在超声速巡航状态下单涵道模式可以提供更大的推力。两种模式的具体运作过程如下：

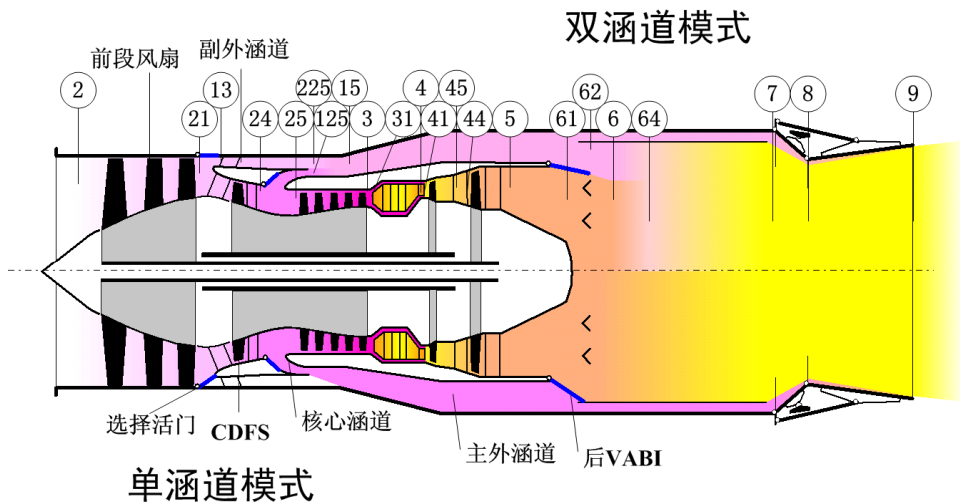


图 2 变循环发动机结构示意图

双涵道模式：当处于起飞或者亚音速巡航时，发动机以双涵道模式工作，增加低压转子转速，打开模式选择活门，开大前、后混合器，使前段风扇具有更大的空气流量，当核心机转速较低时，核心机不会吞下所有的空气流量，多余空气流量经 CDFS 涵道流入主外涵，与此同时，关小 CDFS 可调导叶角度，进一步降低流入 CDFS 的空气流量，使发动机具有最大的涵道比，降低耗油率，以适用于亚音速巡航。

单涵道模式：在飞机加速，爬升以及超音速飞行时，发动机将以单涵道模式工作，关闭模式选择活门，关小前、后混合器出口面积，使前段风扇出口空气几乎全部通过核心驱动和高压压气机，仅少量空气经外涵道流出以冷却尾喷管，这时发动机以涡喷的工作方式，产生高单位推力，以满足上述状态对推力的需求。

问题一所讨论的亚音速巡航就属于双涵道的涡扇循环发动机控制模式。

4.2 流量随压比函数值的变化图形绘制

4.2.1 流量随压比函数值的变化分析

定义 2：压气机压比函数值——设压气机某换算转速所对应的增压比数据（见附录 4）的最大值为 pr_{\max} ，最小值为 pr_{\min} ，则定义该换算转速对应的压气机增压比 pr 的压比函数值 zz 为：

$$zz = \frac{pr - pr_{\min}}{pr_{\max} - pr_{\min}}$$

也就是压气机增压比的标准化变量。

附录四中给出了风扇的特性，即在不同的换算转速下，不同的增压比与流量的对应关系，通过代入上式计算得到不同流量下的压比函数值。因此也得出了压比函数值与流量的数据对应关系。

4.2.1 流量随压比函数值的变化特性图

运用 *matlab* 软件，根据求得的流量与压比函数值的对应关系，绘制其变化特性图如下：

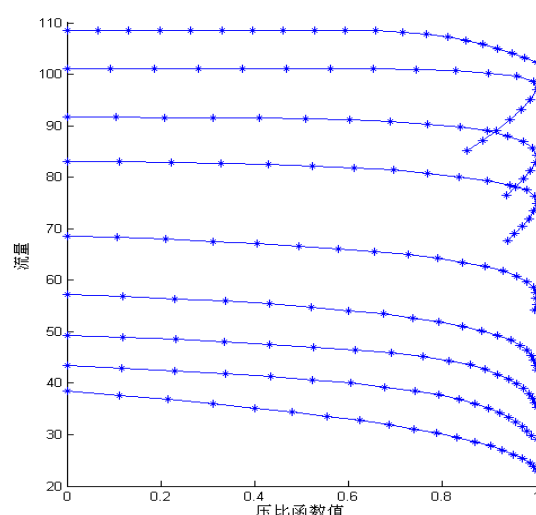


图 3 不同换算转速下流量与压比函数值的关系

从图 3 中可看出，在不同换算转速下，流量与压比函数值的对应关系具有不同的特点。

(1) 当换算转速一定时，流量随压比函数值的增加呈缓慢减小趋势。

(2) 当压比函数值一定时，随着换算转速的增大，流量逐级增加。

(3) 当换算转速 $n_{cor} > 0.7$ 以后，流量的减缓趋势渐渐平缓，且随着压比函数值增加到一定量时，流量会急剧减少。

4.3 风扇出口总温、总压和流量的计算

定义 3：焓——一个体系的内能与体系的体积和外界施加于体系的压强的乘积之和。

定义 4：熵——描述体系混乱度的状态函数，是热力学中表征物质状态的参量之

一，熵均大于等于零。

定义 5: 压气机增压比——该级出口气流的总压与进口气流的总压之比。

定义 6: 压气机效率——在相同条件下，达到同样的增压比时，使气流经历等绝热压缩过程消耗的功与实际压缩过程所消耗的功之比。

在计算之前，首先应该确定各设计点的相关参数，如下表 2 所示：

表 2 变循环发动机双涵模式设计点参数

设计点参数	数值
飞行高度/Km	11
飞行马赫	0.8
低压转速（风扇、低压涡轮物理转速）	0.95
高压转速（高压压气机、CDFS、高压涡轮物理转速）	0.95
风扇压比函数值	0.5
CDFS 压比函数值	0.5
风扇导叶角	0
CDFS 导叶角	0
高压压气机导叶角	0
低压涡轮导叶角	0

4.3.1 风扇进口总温、总压和流量的计算

由变循环发动机的基本构造图可知，风扇的位置处于进风道之后 CDFS 之前，因此欲求得风扇出口的总温，总压和流量，则应该先求风扇入口的总温，总压和流量，利用假设一，进风道出口与风扇进口的温度和压强相等。通过求解进风道出口的温度和压强得到风扇入口的情况。进而对风扇出口的总温，总压及流量进行求解。

1 进气道出口总温、总压和流量的计算

(1)计算标准大气条件下环境压力 p_0 （静压），环境温度 T_0 （静温）。

高度 $H \leq 11\text{km}$

$$\begin{cases} p_0 = 1.01325 \times \left(1 - \frac{H}{44.308}\right)^{5.2553} \\ T_0 = 288.15 - 6.5 \times H \end{cases} \quad (4.1)$$

其中，高度 H 的单位为 km ，温度的单位为 K ，压力的单位为 bar 。

(2)进气道进口的总温总压：

$$\begin{cases} T_0^* = T_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right) \\ p_0^* = p_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{cases} \quad (4.2)$$

γ :气体绝热指数，纯空气 $\gamma=1.4$ ，燃气 $\gamma=1.33$ 。

(3)计算进气道总压恢复系数:

由于已知飞行马赫数 $M_a = 0.8$ ，有

$$M_a \leq 1: \sigma_i = 1.0 \quad (4.3)$$

(4)计算进气道出口总温总压:

$$\begin{cases} T_1^* = T_0^* \\ p_1^* = p_0^* \cdot \sigma_i \end{cases} \quad (4.4)$$

因此，风扇进口总温、总压和流量为:

$$\begin{cases} T_{in}^* = T_0^* \\ p_{in}^* = p_0^* \cdot \sigma_i \end{cases}$$

其中， T_0^* 为进气道进口总温度， p_0^* 为进气道进口总压强， σ_i 为进气道总压恢复系数。

4.3.2 风扇出口总温、总压和流量的计算

双涵道变循环发动机中三个压气机部件，分别是风扇、CDFS 和高压压气机，这三个压气机部件的相关特性采用同一种计算方法。

大多数风扇的叶片均采用线性摩擦焊在整体叶盘上，它的作用是对气流做功从而进行初步增压。于是在风扇的旋转过程中，随着扇叶转子的旋转，会产生一定的空气体积压缩，因此在计算风扇的进口和出口的温度，压强的关系时，要考虑其中存在的相对转速从而求得修正的出口总温和总压及流量。

已知风扇进口总温 T_{in}^* 、总压 P_{in}^* 、风扇的压比函数值 zz 、物理转速 n 、压气机导叶角度 α 。

1. 计算风扇的换算转速 n_{cor}

$$n_{cor} = n \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \quad (4.5)$$

其中，风扇： $T_{in,d}^* = 288.15$ ， T_{in}^* 为风扇进口总温。

2. 计算风扇增压比 pr_c 、效率 η_c 和换算流量 W_c

压气机的增压比 pr_c 、效率 η_c 和换算流量 W_c 分别是其换算转速和压比函数值及导叶角 α 的函数。

$$\begin{cases} pr_c = prc(n_{cor}, zz, \alpha) \\ \eta_c = \eta(n_{cor}, zz, \alpha) \\ W_c = W(n_{cor}, zz, \alpha) \end{cases} \quad (4.6)$$

压气机增压比、效率和换算流量的求法如下:

(1) 附录 4 分别给出了风扇、CDFS，高压压气机的特性数据。利用线性插值法计算出压气机的换算转速为 n_{cor} 、压比函数值为 zz 时的特性图上的增压比 $pr_{c,map}$ 、效率 $\eta_{c,map}$ 和换算流量 $W_{c,map}$ 。

(2) 将(1)求的特性图上的增压比 $pr_{c,map}$ 、效率 $\eta_{c,map}$ 和换算流量 $W_{c,map}$ 代入下式修正后得到压气机的增压比、效率和换算流量:

$$\begin{cases} pr_c = C_{pr}(pr_{c,map} - 1)(1 + \frac{k_{pr}}{100}\alpha) + 1 \\ \eta_c = C_\eta \eta_{c,map} (1 + \frac{k_\eta^2}{100}\alpha) \\ W_c = C_W W_{c,map} (1 + \frac{k_w}{100}\alpha) \end{cases} \quad (4.7)$$

k_{pr} 、 k_w 、 k_η 分别是增压比、效率和换算流量的修正系数。风扇、CDFS、高压压气机 k_{pr} 、 k_w 、 k_η 这三个值均分别取 1, 1, 0.01;
风扇导叶角变化范围:

$$\begin{cases} C_{pr} = 2.3894 \\ C_W = 0.4950 \\ C_\eta = 1.0684 \end{cases} \quad (4.8)$$

3. 计算进口熵, 进口焓, 理想熵, 理想焓。

$$\text{进口熵: } \psi_{in} = \psi(T_{in}^*), \quad (4.9)$$

$$\text{进口焓: } h_{in} = h(T_{in}^*), \quad (4.10)$$

出口理想熵:

$$\psi_{out,ei} = \psi_{in} + \frac{R}{M} \ln pr_c, \quad \psi_{out,ei} = \psi(T_{out,ei}^*) \quad (4.11)$$

出口理想焓, 效率和焓:

$$\begin{cases} h_{out,ei} = h(T_{out,ei}^*) \\ \eta_c = \frac{h_{out,ei} - h_{in}}{h_{out} - h_{in}} \\ h_{out} = h(T_{out}^*) \end{cases} \quad (4.12)$$

压气机出口总温, 总压及流量:

$$\begin{cases} T_{out}^* = h^{-1}(h_{out}) \\ W_a = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*} \\ p_{out}^* = p_{in}^* \cdot pr_c \end{cases} \quad (4.13)$$

其中, 风扇: $p_{in,d}^* = 1.01325$

综上所述, 风扇出口总温、流量和总压的计算模型为:

$$\begin{cases} T_{out}^* = h^{-1}(h_{out}) \\ W_a = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*} \\ p_{out}^* = p_{in}^* \cdot pr_c \end{cases}$$

其中 $\exists h^{-1}(h_{out})$; $M_a \leq 1$: $\sigma_i = 1.0$; $C_{pr} = 2.3894$; $C_W = 0.4950$; $C_\eta = 1.0684$ 。

4.3.3 风扇出口总温、总压及流量的结果

已知条件: 发动机飞行高度 $H = 11\text{km}$, 飞行马赫数 $Ma = 0.8$ 的亚音速巡航点, 导叶角度均设置为 0° , 风扇和 CDFS 的物理转速都为 0.95, 风扇和 CDFS 的压比函数值都为 0.5。

由上述分析可知, 将相关数据代入模型, 在 matlab 中编程求解, 得到风扇出口总温, 总压和流量的结果分别表示如下表 3:

表 3 风扇出口总温, 总压和流量结果

结果	总温	总压	流量
风扇出口	380.06	1.31	19.05

4.4 CDFS 出口处总温、总压及流量的计算

核心驱动风扇级 CDFS 的作用是进一步对气体做功, 使气体压力和温度进一步升高。

由于本问研究的是双涵道问题, CDFS 位于风扇之后, 因此 CDFS 出口的总温, 总压可通过进口处的值进行转换求得, 而进口处的温度和压强又可看做与风扇出口处的相等。此时引入第二个假设, 假设风扇出口处的温度和压强与 CDFS 进口处的相等。

4.4.1 CDFS 进口的总温、总压的计算

由上述可知风扇出口处的总温和总压如下:

$$\begin{cases} T_{out}^* = h^{-1}(h_{out}) \\ p_{out}^* = p_{in}^* \cdot pr_c \end{cases} \quad (4.14)$$

因此, CDFS 进口处的总温和总压为:

$$\begin{cases} T_{in1}^* = h^{-1}(h_{out}) \\ p_{in1}^* = p_{in}^* \cdot pr_c \end{cases}$$

4.4.2 CDFS 出口总温、总压及流量的计算

已知 CDFS 进口总温 T_{in1}^* , 总压 p_{in1}^* , CDFS 的压比函数值 zz 、物理转速 n 、CDFS 导叶角度 α 。

1. 计算 CDFS 换算转速

$$n_{cor} = n \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in1}^*}} \quad (4.15)$$

其中, CDFS: $T_{in,d}^* = 428.56862609$, T_{in1}^* 为 CDFS 进口总温。

2. 计算 CDFS 增压比、效率和换算流量

CDFS 的增压比 pr_c 、效率 η_c 和换算流量 W_c 分别是其换算转速和压比函数值及导叶角 α 的函数。

$$\begin{cases} pr_c = prc(n_{cor}, zz, \alpha) \\ \eta_c = \eta(n_{cor}, zz, \alpha) \\ W_c = W(n_{cor}, zz, \alpha) \end{cases} \quad (4.16)$$

压气机增压比、效率和换算流量的求法如下：

(1) 附录 4 分别给出了风扇、CDFS,高压压气机的特性数据。利用线性插值法计算出压气机的换算转速为 n_{cor} 、压比函数值为 zz 时的特性图上的增压比 $pr_{c,map}$ 、效率 $\eta_{c,map}$ 和换算流量 $W_{c,map}$ 。

(2) 将 (1) 求的特性图上的增压比 $pr_{c,map}$ 、效率 $\eta_{c,map}$ 和换算流量 $W_{c,map}$ 代入下式修正后得到压气机的增压比、效率和换算流量：

$$\begin{cases} pr_c = C_{pr}(pr_{c,map} - 1)(1 + \frac{k_{pr}}{100}\alpha) + 1 \\ W_c = C_W W_{c,map} (1 + \frac{k_w}{100}\alpha) \\ \eta_c = C_\eta \eta_{c,map} (1 + \frac{k_\eta^2}{100}\alpha) \end{cases} \quad (4.17)$$

k_{pr} 、 k_w 、 k_η 分别是增压比、效率和换算流量的修正系数。风扇、CDFS、高压压气机 k_{pr} 、 k_w 、 k_η 这三个值均分别取 1, 1, 0.01；
导叶角变化范围：

$$\text{CDFS: } \begin{cases} C_{pr} = 0.3059 \\ C_W = 0.1500 \\ C_\eta = 1.0999 \end{cases}$$

3. 计算 CDFS 出口参数

压气机出口总压：

$$p_{out}^* = p_{in1}^* \cdot pr_c \quad (4.18)$$

计算进口熵，焓：

$$\begin{cases} \psi_{in} = \psi(T_{in}^*) \\ h_{in} = h(T_{in}^*) \end{cases} \quad (4.19)$$

出口理想熵：

$$\begin{cases} \psi_{out,ei} = \psi_{in} + \frac{R}{M} \ln pr_c \\ \psi_{out,ei} = \psi(T_{out,ei}^*) \end{cases} \quad (4.20)$$

计算压气机出口理想总温，焓：

$$\begin{cases} T_{out,ei}^* \\ h_{out,ei} = h(T_{out,ei}^*) \end{cases} \quad (4.21)$$

根据公式 $\eta_c = \frac{h_{out,ei} - h_{in}}{h_{out} - h_{in}}$ 计算压气机出口焓 h_{out} ；

由压气机出口焓 $h_{out} = h(T_{out}^*)$ 求压气机出口总温： T_{out}^* ；

CDFS 出口流量

$$W_a = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in1}^*}{p_{in,d}^*} \quad (4.22)$$

综上所述，CDFS 出口的总温，流量和总压计算模型为：

$$\begin{cases} p_{out}^* = p_{in1}^* \cdot pr_c \\ W_a = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in1}^*}{p_{in,d}^*} \\ T_{out}^* = h^{-1}(h_{out}) \end{cases}$$

其中， $\exists h^{-1}(h_{out})$ ； $M_a \leq 1$ ； $\sigma_i = 1.0$ ； $C_{pr} = 0.3059$ ； $C_w = 0.1500$ ； $C_\eta = 1.0999$ 。

4.4.3 CDFS 出口总温、总压和流量的结果及分析

将已知数据代入所求计算公式，在 *matlab* 中编程求解，得到 CDFS 出口总温，总压和流量。由 4.3 节可知，风扇出口总温，总压和流量，由假设二可知，CDFS 进出口的具体情况如下表 4：

表 4 CDFS 出口总温，总压和流量结果

位置/结果	总温	总压	流量
风扇出口	380.06	1.31	19.05
CDFS 出口	477.45	1.80	17.14

由表 4 可知，对于温度和压强而言，CDFS 出口较风扇出口都有所增加，这是由于核心驱动风扇级 CDFS 的作用是进一步对气体做功，动能转化为热能，使气体压力和温度进一步升高。对于流量，由风扇出口的气体有一部分通过选择阀门进入前外涵，这是造成流量减少的主要原因。

五 问题二模型的建立与求解

问题二要求设计适当的算法对发动机的 7 个平衡方程组成的非线性方程进行求解。可利用已知外部环境参数和发动机输入参数，根据部件之间应满足的共同工作要求^[3]，如前后部件流量连续，同一截面上压力平衡以及同一轴上的两个部件功率平衡等，求得发动机各参数间的关系。

然后运用传统的优化算法即牛顿-拉夫逊迭代法分析求解，即通过建立这些共同工作方程以协调部件工作，求解这些共同工作方程得到的初始值作为初定值。将初定值代入发动机模型，计算各平衡方程的误差，通过一定的非线性方程组迭代解法，不断地修正独立变量的试给值，使各平衡方程的误差逐渐减小，直至其误差满足设定的精度要求，便可得到方程组足够精度的近似解。

5.1 建模前的准备

在部件级模型建立和求解过程中，模型的复杂性以及建模的误差主要是由于

复杂的二维插值和其中大量的非线性方程求解造成的，因此为减少建模求解的误差，建模过程需要采取一定改进措施才能得到高精度的部件级模型。

(1) 二维插值的处理

在计算压气机和涡轮机的增压比、效率和换算流量过程中需要根据压比函数值 zz ，换算转速 n_{cor} ，根据特性图利用线性差值法计算出压气机的换算增压比 $pr_{c,map}$ 、效率 $\eta_{c,map}$ 和换算流量 $W_{c,map}$ 。

典型的压气机流量特性图 4 所示，由图可知，高速范围内由于等转速线变化率太大，直接由换算流量求增压比会产生较大误差，所以采用压比求换算流量从而减少误差。

同时由于题目给定的压气机特性数据点比较少，有较少的数据点进行二维插值计算精度必然不高，因此，可采用一定的方法和技术对压气机特性数据进行重构，增加未知换算转算下的特性数据点。

(2) 非线性方程组的求解方式

发动机各部件模型中有很多参数的求解需要求解非线性方程，如压气机，燃烧室，涡轮机油气比的求解，各截面总焓求总温，压缩和膨胀过程由熵函数求解总温等。对与非线性问题，除了少量特殊情况外，一般不能利用公式求解，通常只能采用适当通常只能采用适当的迭代解法。对于单变量的非线性方程求解技术比较成熟，上述问题的求解本文使用变步长因子的牛顿法都得到了符合精度要求的解，且迭代次数很少。

非线性方程和方程组的求解区别很大，方程组的求解要更加的复杂困难，这是因为一维情况的方程可以找到一个根的范围，然后缩小范围，最终找到根。而多维情况则很难确定解向量每一维根的范围，直到求得满意的解。本文中通过对独立变量的无因次化即得到了一个非线性方程组满意的结果。

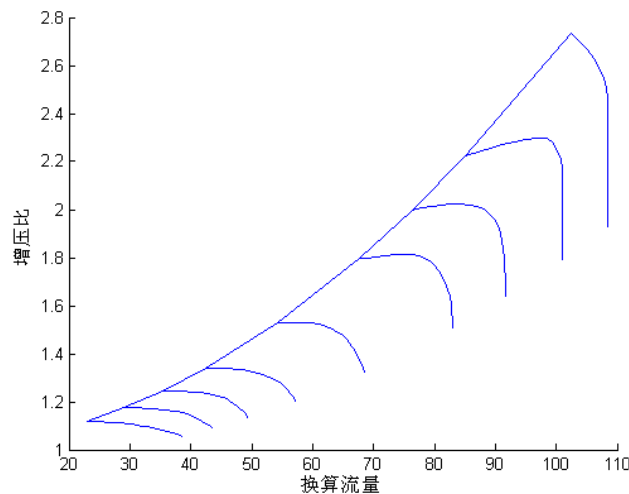


图 4 压气机流量特性图

5.2 模型的建立

5.2.1 发动机各部件参数关系

不管是飞行条件，大气环境还是发动机工作状态的变化，发动机在平衡状态下工作时，各部件之间遵循气动力学与转子动力学的共同工作条件，形成若干基

本方程，然后这些基本方程综合起来形成发动机的共同工作方程，这些平衡方程如下：

(1) 低压轴功率平衡

$$N_{CL} - N_{TL}\eta_{mL} = 0 \quad (5.1)$$

其中 N_{CL} 是风扇消耗功率， N_{TL} 是低压涡轮发出功率， $\eta_{mL}=0.99$ 为中间轴机械效率。

(2) 高压轴功率平衡

$$N_{CH} + N_{CDFS} - N_{TH}\eta_{mH} = 0 \quad (5.2)$$

N_{CH} 和 N_{CDFS} 分别是高压压气机和CDFS的消耗功率， N_{TH} 是高压涡轮发出功率， $\eta_{mH}=0.99$ 是高速轴的机械效率。

(3) 高压涡轮进口截面流量平衡

$$W_{g41} - W'_{g41} = 0 \quad (5.3)$$

W_{g41} 是高压涡轮进口截面气体流量， W'_{g41} 是通过高压涡轮特性数据线性插值得到的高压涡轮流量

(4) 低压涡轮进口截面流量平衡

$$W_{g45} - W'_{g45} = 0 \quad (5.4)$$

W_{g45} 是低压涡轮进口截面流量， W'_{g45} 是通过低压涡轮特性数据线性插值得到的低压涡轮流量。

(5) 后混合器静压平衡

$$p_{61} - p_{62} = 0 \quad (5.5)$$

p_{61} 和 p_{62} 分别是后混合器内、外涵道（主外涵道）的静压，二者应平衡。

(6) 尾喷管面积平衡

$$A_8 - A'_8 = 0 \quad (5.6)$$

A'_8 为给定的尾喷管 8 截面的面积， A_8 为按附录 1 尾喷管的有关公式计算出的尾喷管 8 截面的面积。

(7) 风扇出口流量平衡

$$W_{a2} - W_{a21} - W_{a13} = 0 \quad (5.7)$$

其中风扇出口的流量 W_{a2} 分流为副外涵流量 W_{a13} 和 CDFS 进口流量 W_{a21} ，三者之间应存在平衡关系。

以上这些方程组成非线性方程组的解，即为发动机的共同工作点。每个共同工作点与发动机的一个稳定工作状态相对应，得到发动机平衡状态。

就可以得到由共同工作点得来的各参数的相互关系如下所示：

进气道进出口参数	
进气道进口总温	$T_1 = f_1(H, M)$
进气道进口总压	$P_1 = f_2(H, M)$
进气道出口总温	$T_2 = T_1$
进气道总压恢复系数	$\sigma_i = f_3(M)$
进气道出口总压	$P_2 = \sigma_i \cdot P_1$

风扇出口参数	
相对换算转速	$n_{cor} = f_4(n_L, T_2)$
风扇增压比	$pr_c = f_5(n_{cor}, Z_{CL}, \alpha_L)$
效率	$\eta_c = f_6(n_{cor}, Z_{CL}, \alpha_L)$
换算流量	$W_c = f_7(n_{cor}, Z_{CL}, \alpha_L)$
出口总压	$P_{22} = P_2 pr_c$
出口总温	$T_{22} = f_8(pr_c, \eta_c, T_2, P_2)$
空气流量	$W_a = f_9(W_c, T_2, P_2)$
消耗功率	$N_c = f_{10}(T_2, P_2, \eta_c, pr_c) W_c$
CDFS 出口参数	
换算转速	$n_{cor1} = f_{11}(n_H, T_{22})$
增压比	$pr_{c1} = f_{12}(n_{cor1}, Z_{CDFS}, \alpha_{CDFS})$
效率	$\eta_{c1} = f_{13}(n_{cor1}, Z_{CDFS}, \alpha_{CDFS})$
换算流量	$W_{c1} = f_{14}(n_{cor1}, Z_{CDFS}, \alpha_{CDFS})$
出口总压	$P_{23} = P_{22} pr_{c1}$
出口总温	$T_{23} = f_{15}(T_{22}, P_{22}, \eta_{c1}, pr_{c1})$
空气流量	$W_{23} = f_{16}(W_{c1}, T_{22}, P_{22})$
消耗功率	$N_{c1} = f_{17}(T_{22}, P_{22}, \eta_{c1}, pr_{c1}) W_{23}$
高压压气机出口参数	
换算转速	$n_{cor2} = f_{18}(n_H, T_{23})$
增压比	$pr_{c2} = f_{19}(n_{cor2}, Z_{CH}, \alpha_H)$
效率	$\eta_{c2} = f_{20}(n_{cor2}, Z_{CH}, \alpha_H)$
换算流量	$W_{c2} = f_{21}(n_{cor2}, Z_{CH}, \alpha_H)$
出口总压	$P_{33} = P_{23} pr_{c2}$
出口总温	$T_{33} = f_{22}(T_{23}, P_{23}, \eta_{c2}, pr_{c2})$
空气流量	$W_{33} = f_{23}(W_{c2}, T_{23}, P_{23})$
消耗功率	$N_{c2} = f_{24}(T_{23}, P_{23}, \eta_{c2}, pr_{c2}) W_{33}$
燃烧室出口参数	
油气比	$f_b = f_{25}(T_{33}, T_4^*, H_u, \xi_b)$
燃油流量	$W_f = W_{33} \cdot f_b$
出口总压	$P_4 = P_{33} \sigma_b$
高压涡轮出口参数	
燃气流量	$W_g = W_{33} + W_f$
涡轮效率	$\eta_{TH} = f_{26}(\frac{n_H}{\sqrt{T_4}}, \frac{W_g \sqrt{T_4}}{P_4})$
出口总温	$T_5 = f_{27}(T_4, P_4, \eta_{TH}, Z_{TH})$
出口总压	$P_5 = f_{28}(T_4, P_4, \eta_{TH}, Z_{TH})$

消耗功率	$N_3 = f_{29}(T_4, P_4)W_g$
低压涡轮出口参数	
燃气流量	$W_{g1} = W_g$
涡轮效率	$\eta_{TH} = f_{30}\left(\frac{n_H}{\sqrt{T_5}}, \frac{W_g \sqrt{T_5}}{P_5}\right)$
出口总温	$T_{55} = f_{31}(T_5, P_5, \eta_{TL}, Z_{TL})$
出口总压	$P_{55} = f_{32}(T_5, P_5, \eta_{TL}, Z_{TL})$
消耗功率	$N_{33} = f_{33}(T_5, P_5)W_{g1}$
涵道出口	
内涵道出口参数	$P_{s55} = f_{34}(W_{g1}, P_{55}, A_{55})$
外涵道出口流量	$W_w = W_a - W_{33}$
外涵道出口压力	$P_{25} = f_{35}(P_{22}, \sigma_x)$
外涵道出口总温	$T_{25} = T_{22}$
外涵道出口静压	$P_{s25} = f_{36}(W_w, T_{25}, A_{25})$
混合室出口参数	
混合室燃气流量	$W_h = W_w + W_{g1}$
混合室参考面积	$A_6 = A_{25} + A_{55}$
进出动量平衡	$P_{55} \cdot A_{55} + W_{g1} \cdot V_{55} + P_{25} \cdot A_{25} + W_a \cdot V_{25} = P_6 \cdot A_6 + W_w \cdot V_6$
出口总压	$P_6 = f_{37}(P_{55}, A_{25}, W_{g1}, V_{55}, P_{25}, A_{55}, W_w, V_{25})$
出口总温	$T_6 = f_{38}(P_{55}, A_{25}, W_{g1}, V_{55}, P_{25}, A_{55}, W_w, V_{25})$

5.2.2 确定目标函数

经过以上分析可知，求解发动机的7个平衡方程可通过设定初值，逐步迭代的方法进行。因此将发动机的平衡方程运用发动机各部件参数表示为：

$$\begin{cases} f_1(n_L, n_H, \dots, \alpha_{CH}) = 0 \\ f_2(n_L, n_H, \dots, \alpha_{CH}) = 0 \\ \dots \\ f_7(n_L, n_H, \dots, \alpha_{CH}) = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

设定12个参数的初始值为 n_L^* , n_H^* , ..., α_{CH}^* ，将该初始值代入原方程后，得到

$$\begin{cases} f_1(n_L^*, n_H^*, \dots, \alpha_{CH}^*) = e_1 \\ f_2(n_L^*, n_H^*, \dots, \alpha_{CH}^*) = e_2 \\ \dots \\ f_7(n_L^*, n_H^*, \dots, \alpha_{CH}^*) = e_7 \end{cases} \quad (5.9)$$

将括号内的独立变量记为 x ， $x = (x_1, x_2, \dots, x_{12})$ ，将残差方程记为：

$$E(x) = E(x_1, x_2, \dots, x_{12}) = \begin{cases} e_1(x_1, x_2, \dots, x_{12}) \\ e_2(x_1, x_2, \dots, x_{12}) \\ \vdots \\ e_7(x_1, x_2, \dots, x_{12}) \end{cases} \quad (5.10)$$

在给定的调节规律下，当等式右端都小于设定的误差要求时，则认为各工作参数满足要求，发动机达到平衡状态^[3]。迭代法计算时，目的是使得给定初始值无限逼近真实值，因此必须使其差值达到最小以达到优化的目的。对于上述中的残差方程就是要使得残差最小，由最小二乘法准则得到对应的最小化目标函数为：

$$\min f(x) = \frac{1}{2} E(x)^T E(x) = \sum_{i=1}^m e_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

收敛条件为： $|e_i(x)| \leq \varepsilon$

综上所述，建立的优化模型为：

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^m e_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$s.t. |e_i(x)| \leq \varepsilon$$

5.3 模型的求解

5.3.1 发动机平衡方程组的整体求解过程

航空发动机平衡方程组是一组反映质量流量平衡或能量平衡的非线性方程组。模型共同方程的求解实际上就是非线性方程组的求解。这个方程组中的很多变量需要用其他部件中的参数来间接表示，例如低压轴的功率就需要由风扇、高压压气机、高压涡轮等部件的参数来表示。

根据发动机的结构原理找出各个部件之间的关系，各个部件的顺序依次为：风扇—CDFS—压气机—主燃烧室—高压涡轮—低压涡轮—前混合器—外涵道—后混合器—加力燃烧室—尾喷管。

模型的求解具体步骤为：首先选定一组值作为风扇的输入参数，利用附录一提供的计算公式计算风扇出口的各个参数，将得到的参数作为 CDFS 的初始输入参数，再利用 CDFS 的计算公式计算出 CDFS 出口的各个参数作为下一个部件的输入参数。依此进行下去即可得到各个部件的参数。求解流程图如下图 5 所示。

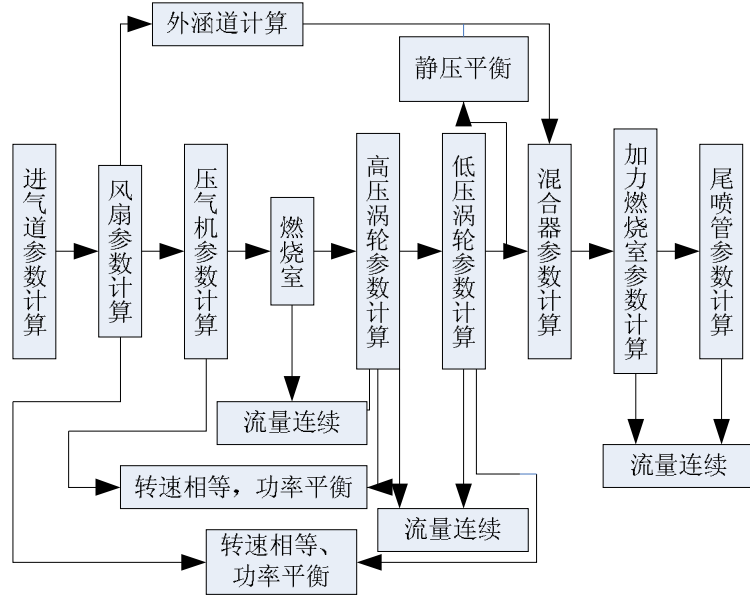


图 5 平衡方程组求解框图

5.3.2 牛顿-拉夫逊迭代法

1. 牛顿-拉夫逊迭代法原理

迭代法定义：迭代是数值分析中通过从一个初始估计出发寻找一系列近似解来解决问题（一般是解方程或者方程组）的过程，为实现这一过程所使用的方法统称为迭代法。

迭代法是一种较优化的算法，通过构造的迭代格式获得最优解。一个好的算法应该具备的典型特征为：迭代点能稳定的接近局部极小点的领域，然后迅速收敛于局部最小点，当满足给定的收敛准则时，迭代终止。

(1) 几何模型

设非线性方程组 $f(x) = 0$ ，

(5.11)

其中： $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]$

将函数 $f(x)$ 在 x_k 点处进行泰勒展开，并取一阶近似，以差分替代微分，得到迭代表达式为：

$$\begin{bmatrix} -e_1 \\ \dots \\ -e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta f_1}{\Delta x_1} & \dots & \frac{\Delta f_1}{\Delta x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\Delta f_n}{\Delta x_1} & \dots & \frac{\Delta f_n}{\Delta x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

上式为迭代增量 Δx 的线性代数方程组，从该线性方程组求解出迭代增量 Δx ，即可根据 $x_{k+1} = x_k + \Delta x$ ，确定调整后的自变量 x_{k+1} 。

(2) 误差估计

以 $f'(x) < 0, f''(x) > 0$ 为依据，由中值定理得： $f(x_n) - f(\xi) = f'(\eta)(x_n - \xi)$ ，

$x_n < \eta < \xi$ ，由于 $f(\xi) = 0$ ，因而 $x_n - \xi = \frac{f(x_n)}{f'(\eta)}$ ，记 $m = \min_{\lambda \in [a, b]} \{ |f'(\lambda)| \}$ ，则

$$x_n - \xi \leq \frac{f(x_n)}{m}。$$

(3) 初始值选取规则

用牛顿迭代法解非线性方程时初始值选取很重要,因为它的选取不同,产生的迭代序可能收敛,也可能不收敛,即使收敛也存在收敛速度的问题。又由于非线性方程往往有许多根,初始值的选取不同可能会收敛到不同的根。初始值的选取规则是使不等, $f(x_0)f''(x_0) > 0$ 成立的值作为初始值 x_0 ,也就是选能使 $f(x_0)$ 与 $f''(x_0)$ 同号的值作为初始值 x_0 , 这个条件仅仅是充分条件不是必要条件。

通过观察分析发现如果要达到同样的计算精度很可能要多迭代一次,这是因为通过不符合选取规则的初始值 x 经过一次迭代后产生的 x_1 满足了初始值的选取规则。所以,虽然按照选取规则选取初始值是产生收敛迭代序列的充分条件而不是必要条件,但是在实际计算中也要按照这个规则选取初始值。

(4) 收敛阶数

收敛阶数是刻画收敛速度快慢的指标,收敛阶数越大,收敛速度越快。

设迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛于初始值 x , 记误差 $\varepsilon_n = x_n - x$, 若存在实数 $p \geq 1$ 及常数 c , 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = c$, 则称该迭代序列 $\{x_n\}$ 是 p 阶收敛。

2. 牛顿-拉夫逊迭代法过程

由以上分析可知,一个好的算法应该具备的典型特征为:迭代点能稳定的接近局部极小点的邻域,然后迅速收敛于局部最小点,当满足给定的收敛准则时,迭代终止。一般采用下降法构造迭代过程,将迭代格式记为:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (5.13)$$

其中: x_k 为第 k 次迭代点; α_k 为当前的步长因子; d_k 为当前搜索方向。不同的步长因子和搜索方向代表了不同的优化算法。搜索方向 d_k 应该是目标函数 $f(x)$ 在 x_k 的下降方向 ($f(x_{k+1}) < f(x_k)$), 应该满足:

$$\nabla f(x_k)^T d_k < 0 \quad (5.14)$$

因此查找相关文献^[2], 关于迭代法, 从给定初值 x_0 开始, 给定最大迭代次数 n , 基于迭代的优化算法基本过程^[2]为:

(1) 初始步

给定初值 x_0 。

(2) 第 k 次迭代的计算过程:

Step1:构造搜索方向 d_k 。构造目标函数在当前点处下降的方向为搜索方向;

Step2: 确定步长因子 α_k 。使目标函数有某种意义的下降, 即保证^[4]:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) < f(x_k);$$

Step3: 构造迭代格式: $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$;

Step4: 如果 $\|\nabla f(x_{k+1})\| \leq \varepsilon_1$, 且 $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \varepsilon_2$, 则转至 Step6, 否则转至 Step5;

Step5: 如果 $k < n$, 令 $k = k + 1$, 转至 Step1, 如果 $k \geq n$ 转至 Step7;

Step6: 置 $x^* = x_{k+1}$, 迭代结束;

Step7: 提示迭代至最大次数, 迭代计算终止;

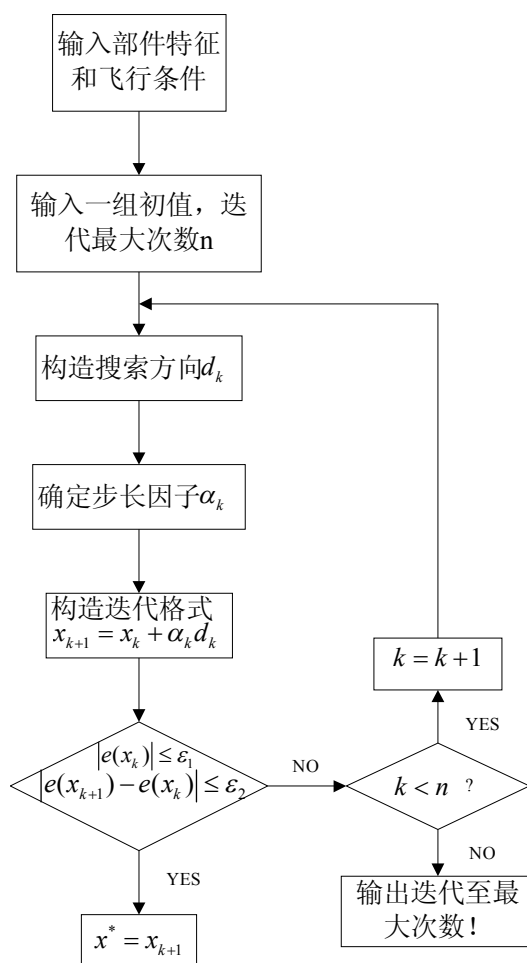


图 6 迭代法运算的流程图

5.3.3 求解结果及分析

根据以上步骤和流程图, 在 *matlab* 中编程求解 (程序见附录), 得到发动机 7 个平衡方程组成的非线性方程组的解如下表 5 所示:

表 5 非线性方程组求解结果

参数/结果	第一组	第二组	第三组	第四组	第五组
低压转速	0.63	0.69	0.72	0.78	0.81
高压转速	0.66	0.71	0.74	0.80	0.83
风扇压比函数值	0.46	0.55	0.60	0.69	0.73
CDFS 压比函数值	0.52	0.55	0.60	0.72	0.76
高压压气机压比函数值	0.58	0.65	0.66	0.76	0.79
高压涡轮压比函数值	0.64	0.70	0.73	0.79	0.82
低压涡轮压比函数值	0.67	0.72	0.75	0.81	0.84
主燃烧室出口温度	1220	1350	1415	1545	1610

上表是通过运用牛顿——拉夫逊迭代法, 对 7 个非线性平衡方程求解得到的

5 组相关参数的结果，由各个参数值可以看出，其值均在取值范围之内，并且相互独立。因此也证实了在解决发动机非线性方程组问题上，该算法是有效的。

5.4 算法有效性验证

考虑到本文中运用的是迭代法求解非线性方程组，迭代法在具有准确度较高，收敛速度快等优点的基础上，也会对非线性方程的求解造成一些误差。因此根据上述求解结果，需要对该算法的有效性进行验证。

验证的思路如下：已知 7 个发动机平衡工作的非线性方程组，将上述所求结果代入以上方程组会得到与原方程有一定误差的方程组。得到的方程组与原方程组有一定的误差，将每一组结果的误差进行累积得到累积误差^[3]为：

$$e'(i) = \sum_{i=1}^m e_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.15)$$

然后对该累积误差求均值，通过对误差均值大小的判断，来确定其有效性的程度。误差均值为：

$$\bar{e}(i) = \frac{\sum_{i=1}^m e_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{m} \quad (5.16)$$

运用上述方法，求得每组结果的误差，累积误差以及平均误差为：

表 6 误差、累积误差及均值误差

组数	第一组	第二组	第三组	第四组	第五组
误差	0.00494	0.00479	0.00467	0.00444	0.00430
累积误差	0.02314				
误差均值	0.004628				

由表 6 可知，每组误差相差不大，误差均值为 0.004628，各组误差在误差均值附近小范围波动。说明牛顿-拉夫逊迭代法求得到的结果稳定，精确度高。该方法对本问的求解与实际情况吻合度较好，结果令人满意。

六 问题三模型的建立及求解

6.1 建模准备

6.1.1 发动机性能寻优^[5]问题

由于发动机的设计控制规律充分地考虑了发动机与发动机之间的差异、性能退化、传感器的误差,稳态工作点有足够的裕度。如果发动机的参数能够精确地估计出来，那么控制时可以使这些裕度减小，提取发动机的潜在性能。

性能寻优控制的基本思想是：综合飞机和发动机的信息，在发动机安全运行的前提下，以自适应模型为基础，通过优化发动机性能来调整准稳态工作点，充分挖掘发动机的性能潜力，提高飞机的作战效能。

当飞行条件(高度 H 马赫数 Ma)一定时, 发动机的工作状态由控制量唯一确定, 所以, 我们选择控制量(导叶角度和尾喷管面积)为优化变量, 通过寻找最优的控制量使发动机的某个性能指标达到最大或最小, 并且同时保证发动机工作在安全范围内。

性能寻优问题可描述为下面的数学规划问题:

性能指标为:

$$\max(\text{或} \min) Y(v)$$

约束条件:

$$g(v) < 0(\text{或} > 0, \text{或} = 0)$$

$$v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$$

其中 v 表示为发动机的控制量, 即优化变量, 约束条件产生的原因有: 反映发动机工作状态的输出参数(共同工作平衡方程、高压转子转速、高压涡轮前温度、换算空气流量)的限制, 控制装置功率和控制执行机构位移的限制。

6.1.2 发电机性能寻优原理

根据发动机的性能参数可知, 要求寻优所追求的目标可以通过 3 种模型实现, 即最大推力模型, 最大单位推力模型和最小耗油率模型。

最大推力模型是通过提高发动机压比和发动机换算空气流量来实现的。可通过讨论发动机 CDFS 导叶角度, 低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积的变化情况对推力的影响来确定其合适的数值。最大单位推力模型与最大推力模型不同之处在于空气流量的大小会直接影响到单位推力, 可分析流量和推力的合适协调从而达到最大单位推力。最小耗油率模型是在等推力的条件下寻找效率最高的工作点。在适当的推力下, 主燃烧油流量的减小, 可以使耗油率降低。

6.1.3 设计参数

根据题目的已知条件, 将该问的设计点参数归纳如下表 7 所示:

表 7 变循环发动机单涵模式设计点参数

设计点参数	数值
飞行高度/Km	11
飞行马赫	1.5
活门面积	0
后混合器面积	29518
风扇导叶角	0
CDFS 导叶角	0
高压压气机导叶角	0
低压涡轮导叶角	0

6.2 模型 I 的建立

6.2.1 确定目标函数

决定发动机的性能参数分别为: 推力, 单位推力, 耗油率。而题目要求对

发动机 CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积 3 个值进行求解以使发动机的性能达到最优。因此以推力最大，单位推力最大，耗油率最小建立多目标优化模型，其目标函数如下：

(1) 最大推力

最大推力的控制^[6]是通过提高发动机压比和发动机换算空气流量来实现的。要进一步提高推力，应该减小 A_8 来提高压比，同时可以增大主燃烧室供油量来进一步提高燃烧温度。但是提高压比的同时会使风扇和压气机喘振裕度减小，增大主燃烧室供油量会使高低压涡轮进口温度增加，因此在提高推力的同时风扇和压气机喘振裕度必须大于最小喘振裕度，高低压涡轮进口总温必须低于其最高温度，然后还有最小尾管面积，最大换算空气流量与最大转速的限制的要求。

$$\max F = f(\alpha_{CDFS}, \alpha_{TL}, A_8)$$

(2) 最大单位推力

最大单位推力 $F_s = F / W_a$ ，其中 F 为推力， W_a 为总的空气流量。在推力一定时，减少空气流量可以增大单位推力。在流量一定时，应该增加推力的大小。

$$\max F_s = f(\alpha_{CDFS}, \alpha_{TL}, A_8)$$

(3) 最低耗油率

当飞机巡航飞行时，在推力恒定条件下，降低发动机耗油率，将增加巡航时间和作战半径。最低油耗模式用于巡航状态。增加喷管喉部面积 A_8 会使得发动机压比减小，压比的减小会使推力有所减小。为了保证推力不变需增加发动机进口空气流量。反之减小 A_8 ，提高发动机压比，是发动机空气换算流量减小，可保持发动机推力不变。寻优的目标是在等推力线上寻找效率最高的工作点。

最低耗油率模型提高了发动机效率，使得在推力恒定条件下，主燃油流量减小，因此耗油率降低。因此目标函数为：

$$\min sfc = f(\alpha_{CDFS}, \alpha_{TL}, A_8)$$

6.2.2 确定约束条件

发动机在平衡状态下工作时，各部件之间必须遵循气动热力学的工作条件，即若干基本方程，具体表示如下表8所示：

表 8 7 个约束条件

低压轴功率平衡	$f(n_L, Z_{CL}, Z_{TL}, \alpha_{CH}) = 0$
高压轴功率平衡	$f(n_H, Z_{CDFS}, Z_{CH}, \alpha_H) = 0$
高压涡轮进口截面流量平衡	$f(n_H, Z_{CH}) = 0$
低压涡轮进口截面流量平衡	$f(n_L, Z_{TL}) = 0$
后混合器静压平衡	$f(P_6, \dots, A_6) = 0$
尾喷管面积平衡	$f(A_8) = 0$
风扇出口流量平衡	$f(W_c, T_2, P_2) = 0$

综上所述，建立的性能寻优多目标优化模型为：

$$\begin{cases} \max F = f(\alpha_{CDFS}, \alpha_{TL}, A_8) \\ \max F_s = f(\alpha_{CDFS}, \alpha_{TL}, A_8) \\ \min sfc = f(\alpha_{CDFS}, \alpha_{TL}, A_8) \end{cases}$$

$$s.t. \begin{cases} f(n_L, Z_{CL}, Z_{TL}, \alpha_{CH}) = 0 \\ f(n_H, Z_{CDFS}, Z_{CH}, \alpha_H) = 0 \\ f(n_H, Z_{CH}) = 0 \\ f(n_L, Z_{TL}) = 0 \\ f(P_6, \dots, A_6) = 0 \\ f(A_8) = 0 \\ f(W_c, T_2, P_2) = 0 \end{cases}$$

6.3 模型 I 的求解及分析

6.3.1 遗传算法

查阅相关资料可知^[7]，遗传算法对求解方程组方面具有有效性，遗传算法是关于非线性方程组求解方法研究中的一个突破，因此采用遗传算法对发动机平衡运动的非线性方程组进行求解。

遗传算法是模拟自然界中优胜劣汰的生存准则，从父代群体中保留优良的个体到下一代群体，淘汰劣质个体，保留优秀个体。

根据建立的模型，目标函数为误差最小，可以设定初始种群，选取最大迭代次数，然后进行交叉变异获得适应度高的个体，即可得到误差最小的结果。

由上述分析以及建立的模型可知，将目标函数的求取看做为优化求解问题，采用遗传算法解决。设初始种群 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ ，选取最大的迭代次数 $T = 100$ ，交叉概率 $P_c = 0.9$ ，变异概率 $P_m = 0.1$ ，代沟 $GAP = 0.7$ ，其算法过程如下：

- Step1: 随机产生初始化种群 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ ；
- Step2: 计算种群父本个体的适应度函数；
- Step3: 根据个体的适应度函数，采用二元锦标赛法选择出优良的个体，并保留下来；
- Step4: 使用单点交叉方法和非一致性变异得到子代；
- Step5: 将父代种群与得到的子代进行合并，并采用精英保留策略，得到 N 个优秀的种群个体；
- Step6: 计算子代个体的适应度函数；
- Step7: 是否满足最大迭代次数，若满足就输出结果，若不满足就进入 Step3。

该算法的流程图如下所示：

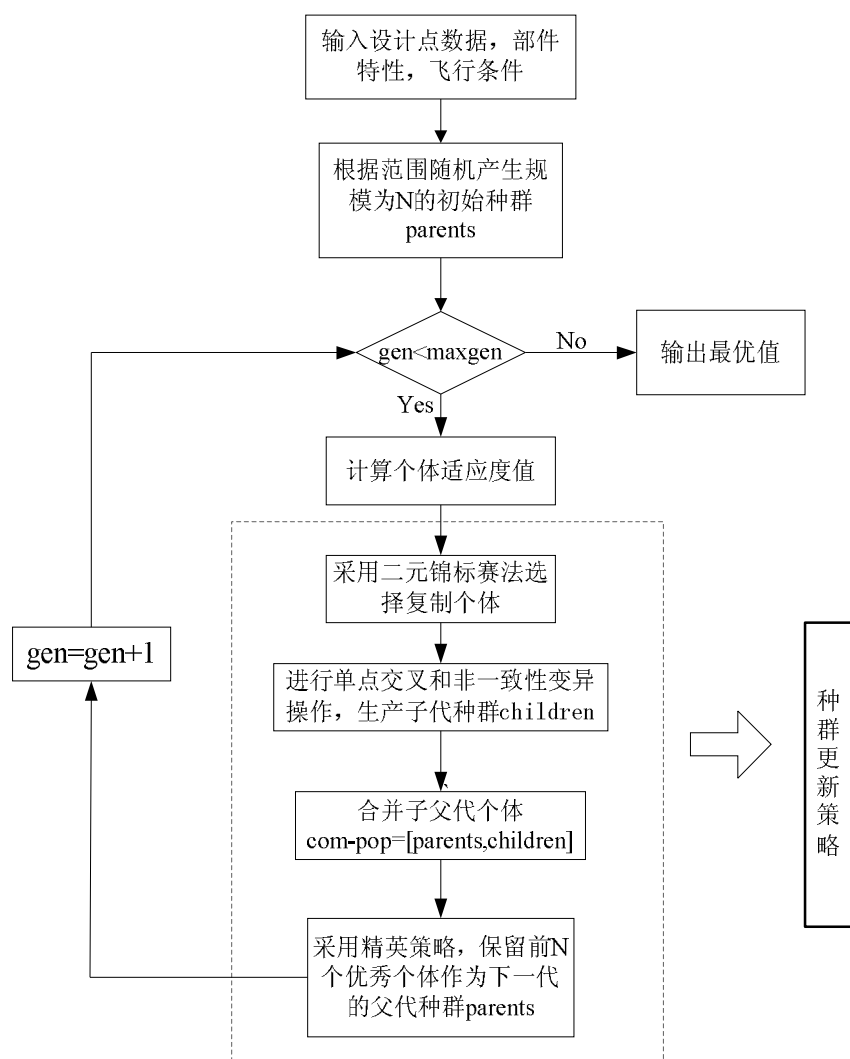


图 7 遗传算法求解流程图

6.3.2 求解结果及分析

根据以上算法，在 *matlab* 中编程求解，得到采用单涵道模式，发动机性能最优时，CDFS 导叶角度 α_{CDFS} ，低压涡轮导叶角度 α_{CH} 和喷管喉道面积 A_8 分别为：

表 9 发动机性能最优时相应三个参变量的值

飞行工况	工作模式	发动机性能参数					
		α_{CDFS}	α_{CH}	A_8	F	F_s	sfc
超音	单涵	8.33	15	9221.1	2.52×10^4	1.3034×10^3	0.4556
		-5	15	9054.4	2.40×10^4	1.3003×10^3	0.4558
		21.67	15	9054.4	2.65×10^4	1.3063×10^3	0.4553

上表为发动机性能最优时，多目标最优模型的求解结果以及其所对应的发动机推力、单位推力和耗油率。在做完多目标最优模型后，继续通过单目标模型分

析了 CDFS 导叶角度 α_{CDFS} ，低压涡轮导叶角度 α_{CH} 和喷管喉道面积 A_8 对发动机推力、单位推力和耗油率的影响。如下表：

表 10 α_{CDFS} 的变化对发动机性能参数的影响

飞行 工况	工作 模式	调节量	发动机性能参数					
		α_{CDFS}	n_L	n_H	W_a	T_4^*	F (x10 ⁵)	sfc
超 音	单 涵	-5	0.63	0.66	12.25	1220	4.5	0.160
		12.78	0.66	0.68	15.91	1220	5.4	0.171
		35	0.69	0.71	20.81	1220	6.76	0.179

表 11 α_{CH} 的变化对发动机性能参数的影响

飞行 工况	工作 模式	调节量	发动机性能参数					
		α_{CH}	n_L	n_H	W_a	T_4^*	F (x10 ⁵)	sfc
超 音	单 涵	-5	0.72	0.74	10.75	1220	7.4	0.198
		3.89	0.75	0.77	12.52	1220	8.4	0.222
		15	0.78	0.80	15.53	1220	9.0	0.254

表 12 A_8 的变化对发动机性能参数的影响

飞 行 工 况	工作 模式	调节量	发动机性能参数					
		A_8	n_L	n_H	W_a	T_4^*	F (x10 ⁵)	sfc
超 音	单 涵	9054.5	0.63	0.66	13.76	1220	4.6	0.158
		9554.5	0.69	0.71	15.97	1220	6.0	0.192
		10054.5	0.78	0.80	12.80	1220	8.8	0.258

由表 10 表 11 表 12 可以看出：在涡轮进口温度 T_4^* 恒定的情况下，当 CDFS 导叶角发生变化时，CDFS 的出口流量、发动机的推力以及油耗率都发生了改变。随着 CDFS 导叶角的增大，发动机的推力也相应增大，CDFS 导叶角增大 50%时，推力增大 15%，油耗率减少 4~5%。

在涡轮进口温度 T_4^* 恒定的情况下，发动机的推力随着低压涡轮导叶角的增大而增大，而油耗率也在减少，低压涡轮导叶角增大 50%时，推力增大 12%，油耗率减少 2~3%。

在涡轮进口温度 T_4^* 恒定的情况下，当尾喷管喉道面积可调时，发动机的推力、油耗率、流量也在相应的调节，尾喷管喉道面积增大 5.56%时，发动机的推力增大 20%。

通过求解发动机性能寻优模型，得到一系列最优化解集，然后通过线性拟合得到推力，单位推力及油耗率随 CDFS 导叶角度 α_{CDFS} ，低压涡轮导叶角度 α_{CH} 的变化趋势。

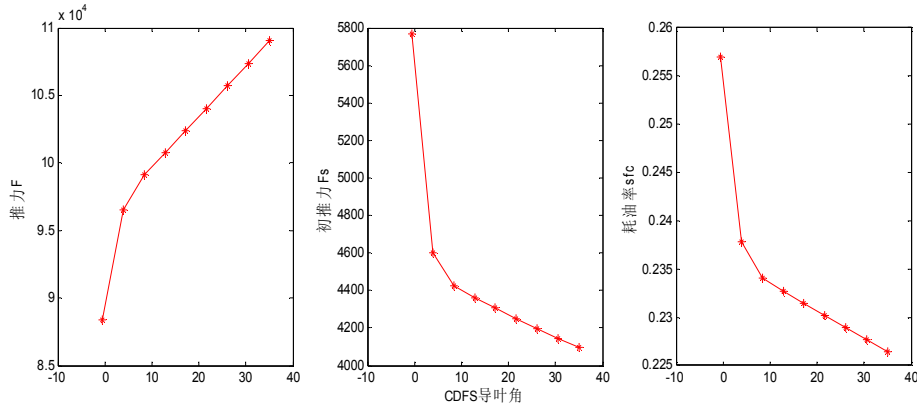


图 8 推力，单位推力及耗油率随 α_{CDFS} 的变化规律

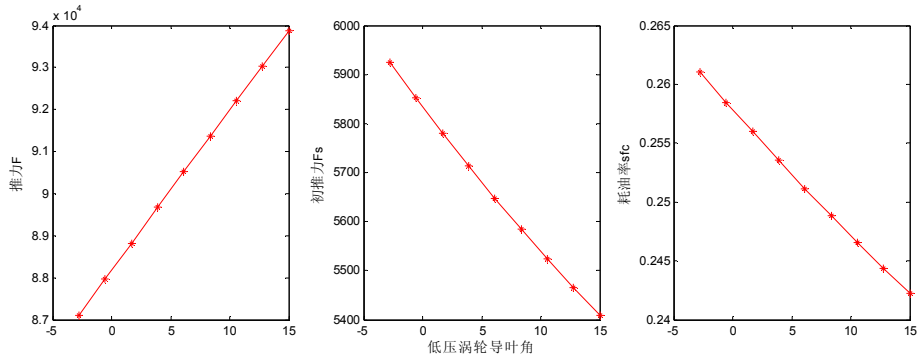


图 9 推力，单位推力及耗油率随 α_{CH} 的变化规律

通过图 8 可以得到，发动机的推力随着 α_{CDFS} 的增大而增大，而单位推力和耗油率则随着 α_{CDFS} 的增大而减小；通过图 9 可以得到，推力与 α_{CH} 大致成正线性关系，而单位推力和耗油率则与 α_{CH} 大致成负线性关系。这些变化趋势和实际情况也比较符合实际情况，从而也说明了求解算法的有效性。

6.4 模型 II 的建立

由于这一问是在上一问的基础上，改变飞机马赫数，求得发动机性能最优时，CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度^[8]，尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律。

首先可以运用上一问中的模型进行发动机的性能寻优，约束条件除了发动机的 7 个平衡方程外，还有马赫数的变化情况即 $Ma = 1.1 \sim 1.6$ 。这样就可以求得马赫数变化过程中一些列参变量的数值，通过多组数值的综合分析，得到他们的变化规律。

综上所述，发动机的动态寻优模型为：

$$\begin{cases} \max F = f(\alpha_{CDFS}, \alpha_{TL}, A_8) \\ \max F_s = f(\alpha_{CDFS}, \alpha_{TL}, A_8) \\ \min sfc = f(\alpha_{CDFS}, \alpha_{TL}, A_8) \end{cases}$$

$$s.t. \begin{cases} f(n_L, Z_{CL}, Z_{TL}, \alpha_{CH}) = 0 \\ f(n_H, Z_{CDFS}, Z_{CH}, \alpha_H) = 0 \\ f(n_H, Z_{CH}) = 0 \\ f(n_L, Z_{TL}) = 0 \\ f(P_6, \dots, A_6) = 0 \\ f(A_8) = 0 \\ f(W_c, T_2, P_2) = 0 \\ 1.1 \leq Ma \leq 1.6 \end{cases}$$

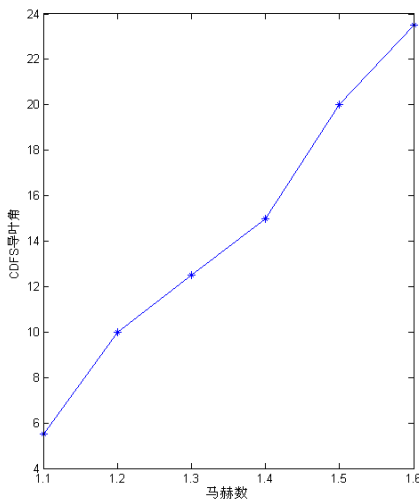
6.5 模型 II 的求解及分析

采用上述动态寻优模型，运用 *matlab* 软件求解，得到飞机性能最优，马赫数 Ma 由 1.1 变化到 1.6 的过程中，CDFS 导叶角度 α_{CDFS} 、低压涡轮导叶角度 α_{CH} ，尾喷管喉道面积 A_8 随飞行马赫数的变化规律如下表 13：

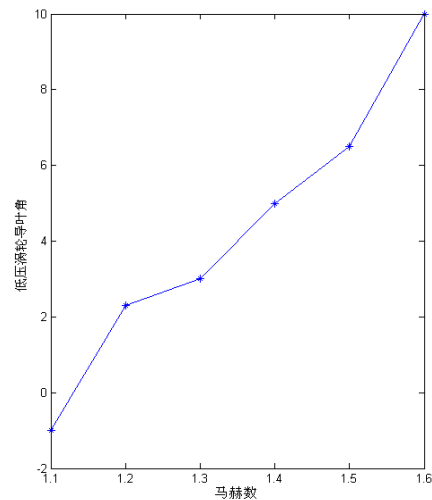
表 13 三指标随马赫数的变化规律

变量 Ma	α_{CDFS}	α_{CH}	A_8
1.1	5.5	-1	9276.6
1.2	10	2.3	9332.2
1.3	12.5	3	9387.4
1.4	15	5	9443.3
1.5	20	6.5	9498.8
1.6	23.5	10	9554.4

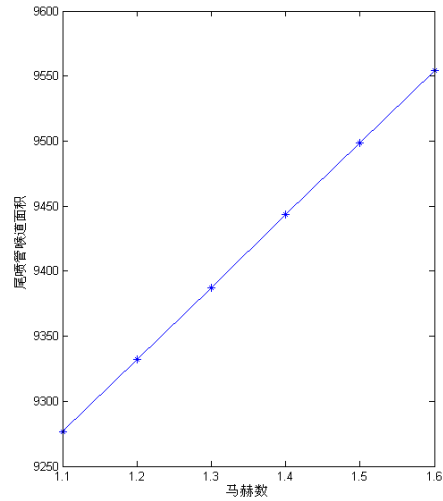
为了便于观察，分别将 CDFS 导叶角度 α_{CDFS} 、低压涡轮导叶角度 α_{CH} ，尾喷管喉道面积 A_8 随飞行马赫数的变化规律用如下图形表示如下：



(a)



(b)



(c)

图 10 α_{CDFS} 、 α_{CH} 、 A_8 随飞行马赫数 Ma 的变化规律

由图 10 可知，CDFS 导叶角度 α_{CDFS} 、低压涡轮导叶角度 α_{CH} 、尾喷管喉道面积 A_8 随马赫数的增加都是呈现上升趋势，只是上升的程度不同。

CDFS 导叶角度 α_{CDFS} 和低压涡轮导叶角度 α_{CH} 随马赫数的增多而折线上升，因此可以得知，发动机工作在小马赫数时主要遇到低压换算转速的限制，然后随着马赫数的增加，发动机将遇到低压物理转速极限，涡轮前温度极限和高压物理转速极限，于是 CDFS 和低压涡轮的导叶角度必须按不同趋势的增大才能保证发动机正常高效运转。

尾喷管喉道面积与马赫数成近似线性关系。根据变循环发动机的工作原理可知，此时发动机压比减小，发动机进口空气流量增加，这样就使得推力不变的情况下，供油量有所减小，因耗油率减少，这样的变化规律也达到了发动机性能优化的目的。

七 模型的评价与推广

7.1 模型的优缺点

模型的优点：

（1）问题二中运用牛顿-拉夫逊迭代法，对非线性方程组进行求解，结果准确性高，收敛速度快，计算结果令人满意。

（2）问题三中将遗传算法运用到了发动机性能寻优模型中，具有创新性，所得结果准确度较高。

（3）建立的算法有效性检验模型能够准确的对算法的求解效果进行判断，对问题的解决提供了有效的支持。

模型的缺点：

（1）由于飞机的飞行姿态可引起进气道出口气流参数的畸变，而这个数据很难及时准确地评定，因此建立优化模型时的约束条件也因此存在数据缺失，结果存在一定的误差。

7.2 模型的推广

本文运用的牛顿-拉夫逊迭代法和遗传算法，不仅可以运用到航空发动机研究的复杂工程问题。运用的非线性方程组求解算法也可运用于非线性的断裂问题、非线性力学问题、电力系统计算、现代光学和经济与非线性规划问题等。也可以用于各种多目标优化的问题，如农作物庄家的抗性研究，背包问题，旅行商问题。

参考文献

- [1] 刘洪波,王荣桥,变循环发动机总体结构和模式转换机构研究[J],航空发动机,2008.34(3):1-5.
- [2] 柳辉,解非线性方程的牛顿迭代法及其应用,重庆工学院学报(自然科学版),2007,8,第21卷,第8期。
- [3] 方昌德,变循环发动机[J],燃气涡轮实验与研究,2004,17(3):1-5.
- [4] 同济大学数学教研室,高等数学[M],第5版,北京:高等教育出版社,2004.
- [5] 王芳,航空发动机性能寻优控制研究,西北工业大学硕士论文,2005.
- [6] Peter V,Walter B,Victor FV,etal.Study of an airbreathing variable Cycle engine[R].AIAA-2011-5758,2011.
- [7] 苏三买,遗传算法及其在航空发动机非线性数学模型中的应用研究,西北工业大学博士学位论文,2002.
- [8] 苟学中,变循环发动机建模及控制规律研究,南京航空航天大学硕士学位论文,2011.