
参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校 同济大学

参赛队号 10247054

队员姓名 1.周飞
2.葛卫梁
3.林宝照

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题目 变循环发动机部件法建模及优化

摘 要：

本文对变循环发动机部件法建模，非线性方程与方程组及多变量性能寻优问题进行了研究。

在问题一中，本文首先利用附录 3 提供的压比函数值定义式计算即可得到各换算转速、各增压比值对应的压比函数值，然后画出流量随压比函数值变化的图形（图 2）。接着利用附录 1 及附录 3 的公式在 Matlab 中编程求解，其中增压比和换算流量涉及到了插值计算。求解结果如下：风扇的出口总温 $378.3485K$ 、总压 $1.28834bar$ 和流量 19.04771 ，CDFs 的出口总温 $419.37667K$ 、出口总压 $1.77447bar$ 和流量 16.93963 。

针对问题二首先通过部件法建模法，将进气道、风扇、CDFs 等 12 个部件的特性计算组成涉及 7 个变量的发动机全流程参数计算，而 7 个平衡方程组成了非线性方程组。该非线性方程组无明显的数学表达形式，因此不可能得到解析解，需要采用数值计算方法来求解。问题的实质是求解一组隐式非线性方程组，满足残差最小的优化目标。本文首先分别应用牛顿-拉弗森算法与遗传算法分别对变循环发动机模型的非线性方程组求解。考虑到牛顿-拉弗森算法与遗传算法的各自优点，本文设计了遗传算法与牛顿-拉弗森算法相结合的混合算法。在所设计的算法流程中，首先由牛顿-拉弗森算法求解，对于牛顿-拉弗森算法求解不收敛的工作点，则调用遗传算法重新确定一点，作为牛顿-拉弗森算法新的迭代初值，如此反复。既保持了牛顿-拉弗森算法的高计算效率，又吸收了遗传算法全局收敛的优点，在保持与现有模型计算效率一致的情况下，彻底突破了发动机非线性数学模型中平衡方程与非线性方程常规解法的局限，实现了模

型在整个包线范围内的收敛。经过综合求解，最后求解出 7 个变量的值为高速转速 0.879、主燃烧出口温度 1520、风扇、CDFFS、压气机、高压涡轮、低压涡轮的压比函数分别为 0.554、0.634、0.793、0.213、0.0254。

问题三的实质是单涵道模式下，变循环发动机 CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积三个可调变量在各自的可调范围内可调，需要对可调变量进行性能寻优，使得设定的性能目标达到最优。本文采用遗传算法对变循环发动机的变几何量进行编码，执行遗传操作对某一性能目标进行寻优，分别对变循环发动机的在固定和变化马赫数下进行最大推力、最小耗油率两种优化目标的性能寻优控制，结果见表 3、表 4。

本文综合运用数理统计、牛顿-拉弗森法、遗传算法等数学方法，利用 Matlab 软件，结合多种模型对所提出问题进行了研究，具有很好的实用性与推广性。最后，总结了模型的优点与不足，并提出了基于牛顿-拉弗森法和 BP 神经网络的混合模型，为后续研究此类问题的学者提供了一个新的思路。

关键词：变循环发动机、部件法建模、牛顿-拉弗森法、遗传算法、BP 神经网络

一、问题重述

随着军事科技的不断发展，对航空发动机性能的要求不断提高。传统的几何固定或少数部件几何可调的航空发动机已经愈来愈难以满足新一代战斗机对动力装置高单位推力、低巡航油耗的双重性能需求，而变循环发动机（Variable Cycle Engine, VCE）则在该领域显示出巨大的潜力^{[1][2]}，是目前国内外研究的热点。燃气涡轮发动机的特性可以用实验方法和计算方法获得，但实验的方法需要研制复杂的设备、投入巨额的资金和消耗巨大的能源，因此实验的方法不可能经常采用。而在已知发动机各部件特性的基础上，用数学模型准确模拟发动机各部件性能就成为一种现实可行且具有较高计算精度的方法。

问题一：（1）画出附录 4 中风扇特性数据表中流量随压比函数值变化的图形。（2）设在发动机飞行高度 H ，飞行马赫数 Ma 的亚音速巡航点，导叶角度均设置为 0° ，风扇和 CDFS 的物理转速都为 0.95，风扇和 CDFS 的压比函数值都为 0.5，求风扇和 CDFS 的出口总温、总压和流量。

问题二：设在发动机飞行高度 $H = 11\text{km}$ ，飞行马赫数 $Ma = 0.8$ 的亚音速巡航点，采用双涵道模式，导叶角度均设置为 0° ，选择活门完全打开，副外涵道面积设为 $1.8395\text{e}+003$ ，后混合器出口总面积设置为 $2.8518\text{e}+004$ ，尾喷管喉道面积 $A_8 = 9.5544\text{e}+003$ ， $n_L = 0.85$ 。运用或设计适当的算法求解由发动机 7 个平衡方程组成的非线性方程组。陈述算法的关键步骤及其解释，并讨论算法的有效性。

问题三：（1）设在发动机飞行高度 $H = 11\text{km}$ ，飞行马赫数 $Ma = 1.5$ 的超音速巡航点，发动机采用单涵道模式，将选择活门面积设置为 0，风扇导叶角度、高压压气机导叶角度、高压涡轮导叶角度均设置为 0° ，后混合器面积设置为 $2.8518\text{e}+004$ 。发动机 CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度和喷管喉道面积 3 个量为多少时，发动机的性能最优。（2）研究发动机飞行高度 $H = 11\text{km}$ ，飞行马赫数从 $Ma = 1.1$ 变化到 $Ma = 1.6$ ，发动机特性最优时，CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度，尾喷管喉道面积随飞行马赫数的变化规律。此时发动机采用单涵道模式，将选择活门面积设置为 0，风扇导叶角度、高压压气机导叶角度、高压涡轮导叶角度均设置为 0° ，后混合器出口总面积设置为 $2.8518\text{e}+004$ ，后混合器内、外涵道面积可调。

二、模型假设

（1）不考虑进气畸变、燃烧延迟对变循环发动机的影响。

- (2) 忽略高压压气机后不经主燃烧室的分流气流。
- (3) 忽略部件气容的影响，认为同一瞬间通过任意截面的气流流量守恒、能量守恒。
- (4) 除涵道外的管路忽略压损。

三、基本符号说明

符号	符号说明
H	飞行高度
Ma	飞行马赫数
zz	压气机部件的压比函数值
n	压气机部件的物理转速
α	压气机部件的导叶角度
T_1^*	进气道出口总温
p_1^*	进气道出口总压
T_{in}^*	压气机部件进口总温
p_{in}^*	压气机部件进口总压
T_{out}^*	压气机部件的出口总温
p_{out}^*	压气机部件的出口总压
W_a	压气机部件的流量
n_L	低压转速（风扇、低压涡轮物理转速）
n_H	高压转速（高压压气机、CDFS、高压涡轮物理转速）
Z_{CL}	风扇压比函数值
Z_{CDFS}	CDFS 压比函数值
Z_{CH}	高压压气机压比函数值
T_4^*	主燃烧室出口温度
Z_{TH}	高压涡轮压比函数值

Z_{TL}	低压涡轮压比函数值
α_L	风扇导叶角
α_{CDFS}	CDFS 导叶角
α_H	高压压气机导叶角
α_{CH}	低压涡轮导叶角
F	发动机推力
W_f	主燃烧室的燃油流量
A_s	喷管喉道面积
α_{low}	低压涡轮导叶角度

四、问题分析

4.1 问题一分析

问题一的第一小问要求画出附录 4 中风扇特性数据表中换算流量随压比函数数值变化的图形，换算流量已知，压比函数值未知。利用附录 3 提供的压比函数数值定义式计算即可得到各换算转速、各增压比值对应的压比函数值。

变循环发动机的主要部件有：进气道、风扇、副外涵道、CDFS 涵道、核心驱动风扇级（CDFS）、主外涵道、前混合器、高压压气机、主燃烧室、高压涡轮、低压涡轮、后混合器、加力燃烧室、尾喷管^[2]。其工作原理图（引用自原题）如图 1 所示，蓝色的线表示有部件之间的气体流动连接。从图中可以看出进气道的出口总温总压即为风扇的进口总温总压，风扇的出口总温总压即为 CDFS 的进口总温总压。因此，可利用附录 1 及附录 3 的公式在 Matlab 中编程求解得到风扇和 CDFS 的出口总温、总压和流量。

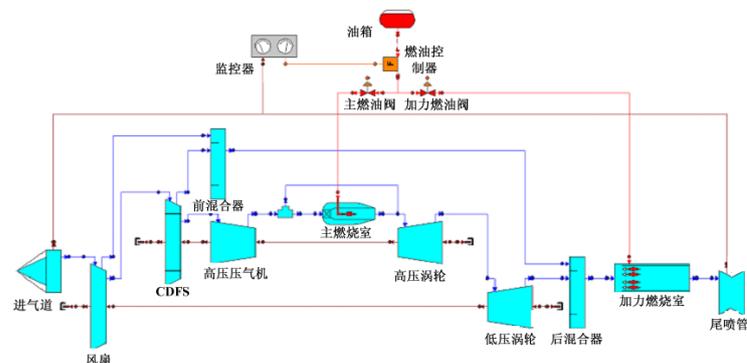


图 1 变循环发动机工作原理图

4.2 问题二分析

7 个平衡方程和相应的部件特性方程一起反映了变循环发动机内在的气动热力特性，是对发动机内部复杂气动热力过程的抽象数学描述，同时又具有明确的物理含义。要通过数学描述获得发动机的热力参数，问题就转化成求解由上述共同方程组的问题，这就是发动机部件级模型建模的本质所在。由于工作中各个部件相互制约和采用了插值计算，使得某些确定部件工作状态的参数不能直接求出，非线性方程组也无明显的数学表达形式，因此不可能得到解析解，需要采用数值计算方法求解发动机非线性数学模型^[3]。

按模块化建模思想，建立描述变循环发动机工作过程的部件级数学模型主要应包括以下三方面的工作：根据发动机气动热力学特性和部件特性建立发动机各部件数学模型；沿整体发动机内部流道，根据流量连续，功率平衡及转子动力学等原理建立反映发动机工作的数学模型，即描述各部件之间相互关系的一系列平衡；用数值方法求解共同工作方程组确定共同工作点，获得发动机的性能参数。本文首先根据附录 1 所给的公式建立变循环发动机的各个部件的模型，然后提出了一种基于牛顿-拉弗森算法和遗传算法的混合算法来求解变循环发动机非线性模型，保证在不太降低计算效率的情况下，扩大收敛范围。

4.3 问题三分析

问题三的实质是如何组合调节变循环发动机的几何参数才能发挥出其最优性能。在变循环发动机多变量控制中，几何参数众多，需要进行组合搭配调节，保证发动机性能某一主要性能参数达到最优。通过一个个地调节找到发动机处于某一稳定状态下的最优搭配工作量比较大，由于变循环发动机是一非线性、时变的系统，变几何量之间的互相调节对性能存在耦合等影响，难以做到调节出来的性能最优，而遗传算法能很好地解决这一难题。采用遗传算法对变循环发动机的变几何量进行编码，执行遗传操作对某一性能目标进行寻优，对变循环发动机的单涵道模式在不同的马赫数下进行最大推力、最小耗油率性能寻优控制，寻求结果即为变循环发动机变几何量的最优组合。

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 风扇流量随压比函数值的变化规律

附录 4 给出了换算转速、增压比、换算流量、效率等 4 个风扇特性参数的数据，而某换算转速、某增压比 pr 下的压气机压比函数值定义为

$$zz = \frac{pr - pr_{\min}}{pr_{\max} - pr_{\min}} \quad \text{式 (1)}$$

即压气机增压比的标准化变量。其中 pr_{\max} 为压气机该换算转速所对应的增压比数据的最大值， pr_{\min} 为最小值。

根据式 (1) 在 Matlab 中编程 (见附件) 求解得到风扇各换算转速、各增压比对应的压比函数值, 并作出 9 个转速下风扇流量随压比函数值的变化曲线, 如图 5.1 所示。从图中可以看出: 同一换算转速下, 流量随压比函数值呈缓慢减小趋势; 同一压比函数值下, 流量随换算转速的减小而减小。

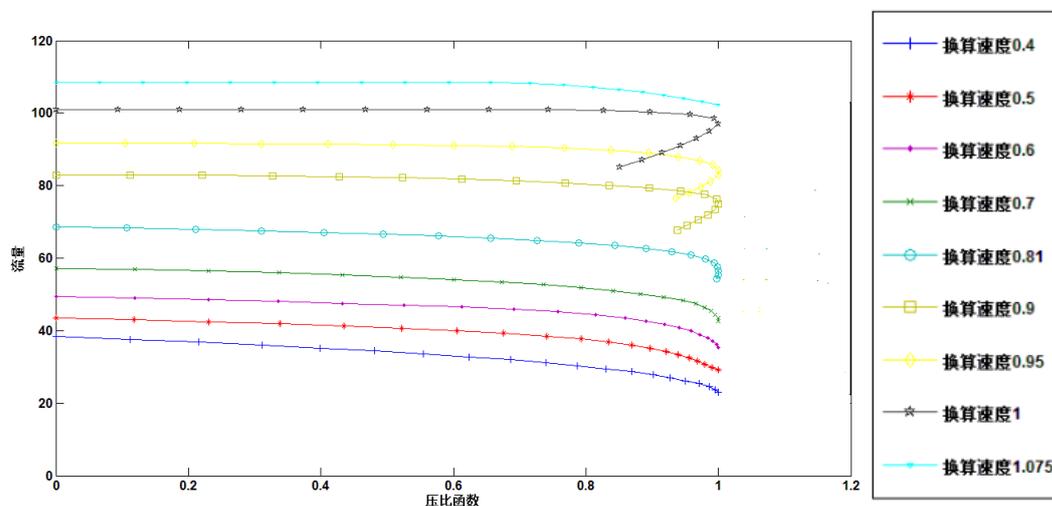


图 2 各转速下转速下风扇流量随压比函数值的变化曲线

5.1.2 风扇、CDFS 出口总温总压和流量的计算

(1) 进气道模型的建立与求解

发动机的发动机飞行高度 $H = 11km$, 飞行马赫数 $Ma = 0.8$ 。

1) 计算标准大气条件下环境温度 T_0 (静温), 环境压力 p_0 (静压), 由于飞行高度 $H \leq 11km$,

$$\begin{cases} T_0 = 288.15 - 6.5 \times H = 216.65 K \\ p_0 = 1.01325 \times \left(1 - \frac{H}{44.308}\right)^{5.2553} = 0.22616 bar \end{cases} \quad \text{式 (2)}$$

2) 进气道里是纯空气, 气体绝热指数 $\gamma = 1.4$, 则进气道进口的总温总压,

$$\begin{cases} T_0^* = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right) = 244.3812 K \\ p_0^* = p_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 0.34474 K \end{cases} \quad \text{式 (3)}$$

3) 由于 $M_H = 0.8 \leq 1$, 则进气道总压恢复系数 $\sigma_i = 1.0$ 。

4) 进气道出口总温总压,

$$\begin{cases} T_1^* = T_0^* = 244.3812 K \\ p_1^* = p_0^* \cdot \sigma_i = 0.34474 bar \end{cases} \quad \text{式 (4)}$$

(2) 风扇、CDFS 模型的建立与求解

风扇进口总温 $T_{in}^* = T_1^* = 244.3812 K$ 、总压 $P_{in}^* = p_1^* = 0.34474 K$ ，风扇、CDFS 的压比函数值 $zz = 0.5$ 、物理转速 $n = 0.95$ 、导叶角度 $\alpha = 0$ 。CDFS 与风扇同为双涵道变循环发动机中的压气机部件，计算方法相同。

1) 风扇 $T_{in,d}^* = 288.15$ ，CDFS 的 $T_{in,d}^* = 428.56862609$ ，则风扇换算转速，

$$n_{cor} = n \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} = 1.03157 \quad \text{式 (5)}$$

同理CDFS的换算转速 $n_{cor} = 1.0111$

2) 已知风扇和CDFS的换算转速和压比函数值，由于压气机的增压比 pr_c 、效率 η_c 和换算流量 W_c 分别是其换算转速 n_{cor} 和压比函数值 zz 及导叶角 α 的函数，根据第一小问的特性图可利用线性插值法计算出风扇的增压比 $pr_{c,map} = 2.1454$ ，效率 $\eta_{c,map} = 0.78232$ ，换算流量 $W_{c,map} = 104.157$ ；CDFS 的增压比 $pr_{c,map} = 2.23351$ ，效率 $\eta_{c,map} = 0.79569$ ，换算流量 $W_{c,map} = 292.08258$ 。

3) 将 (2) 求得的增压比 $pr_{c,map}$ 、效率 $\eta_{c,map}$ 和换算流量 $W_{c,map}$ 代入下式，修正后得到风扇的增压比、效率和换算流量，

$$\begin{cases} pr_c = C_{pr} (pr_{c,map} - 1) \left(1 + \frac{k_{pr}}{100} \alpha\right) + 1 = 3.73715 \\ W_c = C_w W_{c,map} \left(1 + \frac{k_w}{100} \alpha\right) = 51.55771 \\ \eta_c = C_\eta \eta_{c,map} \left(1 + \frac{k_\eta^2}{100} \alpha\right) = 0.83584 \end{cases} \quad \text{式 (6)}$$

CDFS 的增压比、效率和换算流量，

$$\begin{cases} pr_c = C_{pr} (pr_{c,map} - 1) \left(1 + \frac{k_{pr}}{100} \alpha\right) + 1 = 1.37733 \\ W_c = C_w W_{c,map} \left(1 + \frac{k_w}{100} \alpha\right) = 43.81239 \\ \eta_c = C_\eta \eta_{c,map} \left(1 + \frac{k_\eta^2}{100} \alpha\right) = 0.87517 \end{cases} \quad \text{式 (7)}$$

其中 k_{pr} 、 k_w 、 k_η 分别是增压比、效率和换算流量的修正系数。风扇、CDFS k_{pr} 、 k_w 、 k_η 这三个值均分别取 1, 1, 0.01；CDFS 导叶角变化范围： $-5^\circ \leq \alpha \leq 35^\circ$ ，风扇导叶角变化范围： $-5^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ ；风扇：

$$\begin{cases} C_{pr} = 2.3894 \\ C_w = 0.4950 \\ C_\eta = 1.0684 \end{cases},$$

$$\text{CDFS: } \begin{cases} C_{pr} = 0.3059 \\ C_w = 0.1500 \\ C_\eta = 1.0999 \end{cases}$$

4) 风扇出口总压 $p_{out, fan}^* = p_{in}^* \cdot pr_c = 0.34474 \times 3.73715 \approx 1.28834 \text{ bar}$

$T_{in, d}^* = 288.15$, $p_{in, d}^* = 1.01325$, 风扇的流量

$$W_{a, fan} = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in, d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in, d}^*} = 51.55771 \times \sqrt{\frac{288.15}{244.3812}} \times \frac{0.34474}{1.01325} \approx 19.04771 \text{ 式 (8)}$$

同理 CDFS 的出口总压 $p_{out, cdfs}^* \approx 1.77447 \text{ bar}$, 流量 $W_{a, cdfs} = 16.93963$ 。

5) 风扇的熵计算公式为,

$$\begin{aligned} \psi = \psi(T) = & -0.30183674 \times 10^6 + 0.10489652 \times 10^4 \times T - 0.23284057 \times T^2 \\ & + 0.45288431 \times 10^{-3} \times T^3 - 0.31308477 \times 10^{-6} \times T^4 + 0.11341362 \times 10^{-9} \\ & \times T^5 - 0.21298087 \times 10^{-13} \times T^6 + 0.16363600 \times 10^{-17} \times T^7 \end{aligned} \text{ 式 (9)}$$

空气的焓计算公式为,

$$\begin{aligned} h = h(T) = & (0.10489652 \times 10^4) \times \ln(T \times 10^{-3}) + 0.80558643 \times 10^4 + \\ & (-465.6811 \times T + 0.6793 \times T^2 - 4.1745 \times 10^{-4} \times T^3 + 1.4177 \times 10^{-7} \times T^4 \\ & - 2.5558 \times 10^{-11} \times T^5 + 2.2909 \times 10^{-15} \times T^6) \times 10^{-3} \end{aligned} \text{ 式 (10)}$$

风扇进口熵: $\psi_{in} = \psi(T_{in}^*) = 6.499 \times 10^3$, 进口焓: $h_{in} = h(T_{in}^*) = -5.3808 \times 10^4$;

风扇出口理想熵:

$$\psi_{out, ei} = \psi_{in} + \frac{R}{M} \ln pr_c = 6.8774 \times 10^3 = \psi(T_{out, ei}^*) \text{ 式 (11)}$$

这里 $M = 1$, R 是气体常数, 取 $R = 287 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ 。解得风扇出口理想总温

$$T_{out, ei}^* = 356.46764 \text{ K}。$$

风扇出口理想焓: $h_{out, ei} = h(T_{out, ei}^*) = 5.8567 \times 10^4$

把 $\eta_c = 0.83584$, $h_{in} = -5.3808 \times 10^4$, $h_{out, ei} = 5.8567 \times 10^4$ 代入公式

$$\eta_c = \frac{h_{out, ei} - h_{in}}{h_{out} - h_{in}} \text{ 式 (12)}$$

计算得到风扇出口焓 $h_{out} = 80638.31585$ 。又由 $h_{out} = h(T_{out}^*)$ 求得风扇出口总

温 $T_{out, fan}^* \approx 378.34852 \text{ K}$ 。同理解得 CDFS 的出口总温 $T_{out, cdfs}^* \approx 283.32764 \text{ K}$ 。

上述计算过程的 Matlab 程序见附件。

综上风扇的出口总温 $T_{out, fan}^* \approx 378.34852 K$ ，出口总压 $p_{out, fan}^* \approx 1.28834 bar$ ，

流量 $W_{a, fan} \approx 19.04771$ 。

CDFS 的出口总温 $T_{out, cdfs}^* \approx 419.37667 K$ ，出口总压 $p_{out, cdfs}^* \approx 1.77447 bar$ ，流

量 $W_{a, cdfs} \approx 16.93963$ 。

5.2 问题二模型的建立与求解

变循环发动机工作时，各部件间必须遵循气动力学与转子动力学共同工作条件，即发动机的平衡方程。变循环发动机的平衡方程可转化为如下 7 个误差方程：

$$\begin{cases} err_1 = N_{CL} - N_{TL}\eta_{mL} \\ err_2 = N_{CH} + N_{CDFS} - N_{TH}\eta_{mH} \\ err_3 = W_{g41} - W'_{g41} \\ err_4 = W_{g45} - W'_{g45} \\ err_5 = p_{61} - p_{62} \\ err_6 = A_8 - A'_8 \\ err_7 = W_{a2} - W_{a21} - W_{a13} \end{cases} \quad \text{式 (13)}$$

其中 N_{CL} 是风扇消耗功率， N_{TL} 是低压涡轮发出功率， $\eta_{mL}=0.99$ 为中间轴机械效率； N_{CH} 和 N_{CDFS} 分别是高压压气机和 CDFS 的消耗功率， N_{TH} 是高压涡轮发出功率， $\eta_{mH}=0.99$ 是高速轴的机械效率； W_{g41} 是高压涡轮进口截面气体流量， W'_{g41} 是通过高压涡轮特性数据线性插值得到的高压涡轮流量； W_{g45} 是低压涡轮进口截面流量， W'_{g45} 是通过低压涡轮特性数据线性插值得到的低压涡轮流量； p_{61} 和 p_{62} 分别是后混合器内、外涵道（主外涵道）的静压； A'_8 为给定的尾喷管 8 截面的面积，这里 $A'_8 = 9.5544e+003$ 、 A_8 为按附录 1 尾喷管的有关公式计算出的尾喷管 8 截面的面积； W_{a2} 为风扇出口的流量， W_{a13} 为分流为副外涵流量， W_{a21} 为 CDFS 进口流量。

求解变循环发动机平衡方程的核心最终归结为在各部件关系式下，上述非

线性方程组的求解问题。根据题给条件分析，有七个未知量，设有向量 X ，

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T \quad \text{式 (14)}$$

其中 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ 分别表示高压转速（高压压气机、CDFFS、高压涡轮物理转速） n_H ，风扇压比函数值 Z_{CL} ，CDFFS 压比函数值 Z_{CDFFS} ，高压压气机压比函数值 Z_{CH} ，主燃烧室出口温度 T_4^* ，高压涡轮压比函数值 Z_{TH} ，低压涡轮压比函数值 Z_{TL} 等七个未知量。 $a_i \leq x_i \leq b_i$ ， $i=1,2,\dots,7$ ， a_i ， b_i 为相应自变量 x_i 的上下限。根据题给条件，自变量 x_i 的取值范围为

$$\begin{cases} 0 < x_1 \leq 1 \\ 0 < x_2 \leq 1 \\ 0 < x_3 \leq 1 \\ 0 < x_4 \leq 2000 \\ 0 < x_5 \leq 1 \\ 0 < x_6 \leq 1 \\ 0 < x_7 \leq 1 \end{cases} \quad \text{式 (15)}$$

设有限空间内的一般线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_7) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_7) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_7) = 0 \\ f_4(x_1, x_2, \dots, x_7) = 0 \\ f_5(x_1, x_2, \dots, x_7) = 0 \\ f_6(x_1, x_2, \dots, x_7) = 0 \\ f_7(x_1, x_2, \dots, x_7) = 0 \end{cases} \quad \text{式 (16)}$$

这个方程组是多元非线性方程组，无法用显式表达，只能按照发动机沿流程的各种平衡关系计算才能得到残量 $err_i (i=1,2,\dots,7)$ 与试取值向量 X 之间的关系。即先给出一组初值 $X^0 = [x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0, x_7^0]$ ，代入变循环发动机的部件模型，沿发动机流程的参数计算，检验是否满足 7 个平衡方程。若满足，则这组初值即为所求的发动机参数。若不满足，就得到一组残量。用向量 ERR 表示这组残量，即：

$$ERR = (err_1, err_2, err_3, err_4, err_5, err_6, err_7)^T \quad \text{式 (17)}$$

构造非线性函数：

$$F(X) = \lambda_1 |f_1(x_1)| + \lambda_2 |f_2(x_2)| + \cdots + \lambda_7 |f_7(x_7)| = \sum_{i=1}^7 \lambda_i |f_i(X)| \quad \text{式 (18)}$$

式中 λ_i 为权重系数, $\lambda_i > 0, i=1,2,\dots,7$ 。在整个自变量的有限区域, 当非线性方程组有解 $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*)^T$ 时, 函数满足 $F(X) \geq 0$; 即函数 $F(X)$ 的极小值

$$\min F(X) = F(X^*) = 0 \quad \text{式 (19)}$$

非线性方程组的求解问题等价于函数 $F(X)$ 的极小值问题。可通过构造式 (16) 的函数 $F(X)$, 实现非线性方程组求解转化为如下优化问题

$$\min F(X) = \lambda_1 |f_1(x_1)| + \lambda_2 |f_2(x_2)| + \cdots + \lambda_7 |f_7(x_7)| \quad \text{式 (20)}$$

且 $F(X)$ 取极小值时的 X^* 即为所求方程的组的解。根据以上分析, 发动机平衡方程问题可转化为如下极小值优化问题:

$$\text{目标函数: } \min ERR(X) = \sum_{i=1}^7 \lambda_i |err(i)| \quad (i=0,1,\dots,7) \quad \text{式 (21)}$$

$$\text{收敛条件: } |err(i)| \leq \varepsilon \quad (i=0,1,\dots,7) \quad \text{式 (22)}$$

ε 为误差精度。

综上, 问题二的实质是求解一组隐式非线性方程组, 满足残差最小的优化目标, 需要通过数值算法求解, 其中算法收敛性和计算效率是模型的重要评价指标。由于变循环发动机是一类特殊的工作对象, 其数学模型为一高度非线性的复杂系统, 发动机工作范围宽、参数变化范围大、非线性数学模型没有显式的数学函数描述、准确的变量导致求解困难, 因此在模型的平衡方程求解方面, 现有的迭代解法存在不收敛的局限。如牛顿-拉弗森算法 (Newton-Raphson, 以下简称 N-R 算法) 具有良好的局部收敛性, 但该方法对初值选取敏感, 模型计算时常常因为初猜值不准, 使计算失败, 引起模型发散。遗传算法 (Genetic Algorithm, 以下简称 GA 算法) 是近年来得到快速发展的一种基于自然群体遗传演化机制的全局优化算法。该算法具有不依赖所研究问题的具体领域、优化无需梯度信息、不要求显式的函数形式、对初猜值无要求、运算隐含并行, 以及以概率 1 收敛于全局最优解的特点。

本文提出了一种基于 N-R 算法和遗传 GA 算法的变循环发动机混合非线性数学模型, 并在 Matlab 中编程实现。

下面分别运用牛顿-拉弗森算法、遗传算法以及基于牛顿-拉弗森算法和遗传算法的混合算法对模型进行建模求解。

5.2.1 变循环发动机部件级建模

(1) 进气道

已知参数：进气道进口的总温 T_0^* ，总压 p_0^* 。

出口参数计算：出口总温 $T_1^* = T_0^*$ ；

$$\text{出口总压 } p_1^* = p_0^* \cdot \sigma_i。$$



图 3 进气道模型示意图

(2) 风扇

已知参数：风扇进口总温 T_{in}^* 、总压 p_{in}^* 、风扇

的压比函数值 Z_{CL} 。

出口参数计算：出口总压 $p_{out}^* = p_{in}^* \cdot pr_c$ ；

出口总温 $h_{out} = h(T_{out}^*)$ ；

$$\text{出口流量 } W_a = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*}}。$$

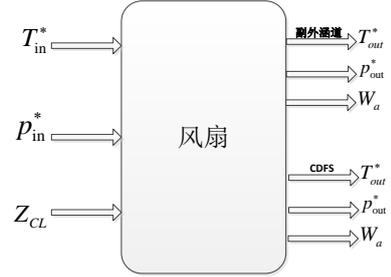


图 4 风扇模型示意图

(3) 核心驱动风扇级 CDFS

已知参数：进口总温 T_{in}^* 、总压 p_{in}^* 、CDFS

的压比函数值 Z_{CDFS} ，转速 n_H ，进口流量 W_a 。

出口参数计算：出口总压 $p_{out}^* = p_{in}^* \cdot pr_c$ ；

出口总温 $h_{out} = h(T_{out}^*)$ ；

$$\text{出口流量 } W_a = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*} \cdot \frac{p_{in}^*}{p_{in,d}^*}}。$$

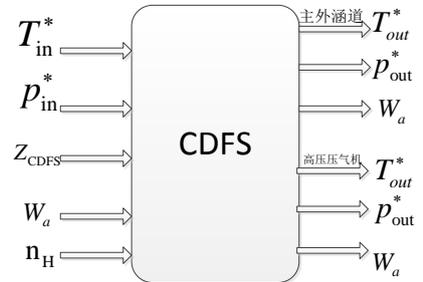


图 5 CDFS 模型示意图

(4) 高压压气机

已知参数：进口总温 T_{in}^* 、总压 p_{in}^* 、压气机的压比函数值 Z_{CH} ，转速 n_H ，进口流量 W_a 。

出口参数计算：

出口总压 $p_{out}^* = p_{in}^* \cdot pr_c$ ；

出口总温 $h_{out} = h(T_{out}^*)$ ；

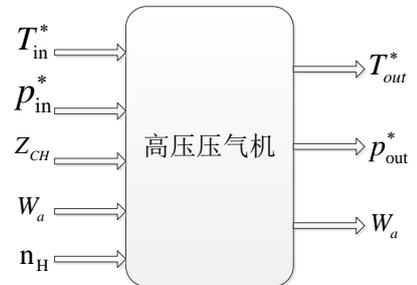


图 6 高压压气机模型示意图

$$\text{出口流量 } W_a = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{P_{in}^*}{P_{in,d}^*}。$$

(5) 主燃烧室

已知参数：进口总温 T_{3in}^* 、总压 p_{3in}^* 、空气流量 W_{a3in} 。

出口参数计算：出口温度 T_4^* （作为参变量）；

燃油流量 $W_f = W_{a3} \cdot f_b$ ；

出口总压 $p_4^* = p_{3in}^* \sigma_b$ 。

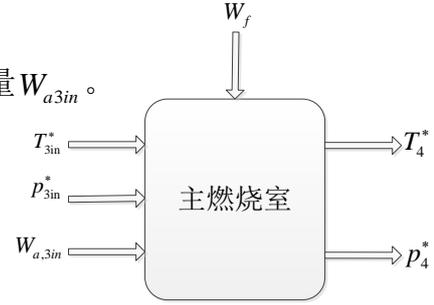


图 7 主燃烧室模型示意图

(6) 低压涡轮

已知参数：进口总温 T_{in}^* 、总压 P_{in}^* 、

低压涡轮的压比函数值 Z_{TL} 。

出口参数计算：出口总压 $p_{out}^* = p_{in}^* / pr_c$ ；

$$\text{出口总温 } pr_c = \left[1 - \left(1 - \frac{T_{out}^*}{T_{in}^*} \right) / \eta_c \right]^{-\bar{C}_p / R}；$$

$$\text{出口涡轮流量 } W_g = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{P_{in}^*}{P_{in,d}^*}。$$

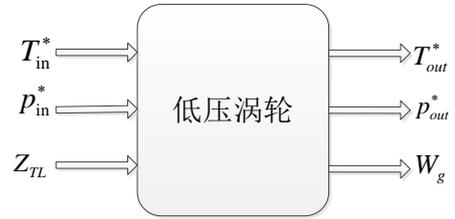


图 8 低压涡轮模型示意图

(7) 高压涡轮

已知参数：进口总温 T_{in}^* 、总压 P_{in}^* 、

低压涡轮的压比函数值 Z_{TL} 。

出口参数计算：出口总压 $p_{out}^* = p_{in}^* / pr_c$ ；

$$\text{出口总温 } pr_c = \left[1 - \left(1 - \frac{T_{out}^*}{T_{in}^*} \right) / \eta_c \right]^{-\bar{C}_p / R}；$$

$$\text{出口涡轮流量 } W_g = W_c \cdot \sqrt{\frac{T_{in,d}^*}{T_{in}^*}} \cdot \frac{P_{in}^*}{P_{in,d}^*}。$$



图 9 高压涡轮模型示意图

(8) 涵道（包括主外涵道和副外涵道）

已知参数：涵道进口总温 T_{in}^* 、总压 p_{in}^* 、

流量 $W_{a,in}$ 、总压恢复系数 σ_{duct} 。



图 10 涵道模型示意图

出口参数计算：出口总温 $T_{out}^* = T_{in}^*$ ；

出口总压 $p_{out}^* = p_{in}^* \sigma_{duct}$ ；

流量 $W_{a,out} = W_{a,in}$ 由下列方程求出：

(9) 前混合器

已知参数：主外涵道和副外涵道的出口总温 T_{in}^* 、

总压 p_{in}^* 、流量 $W_{a,in}$ ；

出口参数计算：前混合器出口总温 T_{15}^* 、

总压 p_{15}^* 、流量 W_{g15} 由下式求出：

$$\begin{cases} W_{g225} + W_{g125} = W_{g15} \\ W_{g225} h_{225} + W_{g125} h_{125} = W_{g15} h_{15} \\ p_{225}^* f(\lambda_{225}) A_{225} + p_{125}^* f(\lambda_{125}) A_{125} = p_{15}^* f(\lambda_{15}) (A_{225} + A_{125}) \\ W_{g15} = k_m \frac{p_{15}^*}{\sqrt{T_{15}^*}} A_{15} q(\lambda_{15}) \end{cases}$$

(10) 后混合器

已知参数：主外涵道和高压涡轮的出口总温 T_{in}^* 、

总压 p_{in}^* 、流量 $W_{a,in}$ ；

出口参数计算：后混合器出口总温 T_6^* 、总压 p_6^* 、

流量 W_{g6} 由下式给出：

$$\begin{cases} W_{g61} + W_{g62} = W_{g6} \\ W_{g61} h_{61} + W_{g62} h_{62} = W_{g6} h_6 \\ p_{61}^* f(\lambda_{61}) A_{61} + p_{62}^* f(\lambda_{62}) A_{62} = p_6^* f(\lambda_6) (A_{61} + A_{62}) \\ W_{g6} = k_m \frac{p_6^*}{\sqrt{T_6^*}} A_6 q(\lambda_6) \end{cases}$$

(11) 加力燃料室

已知参数：进口总温 T_{6in}^* 、总压 p_{6in}^* 、流量 W_{6in} 。

出口参数计算：出口总温 T_{6out}^* 、总压 p_{6out}^* 、

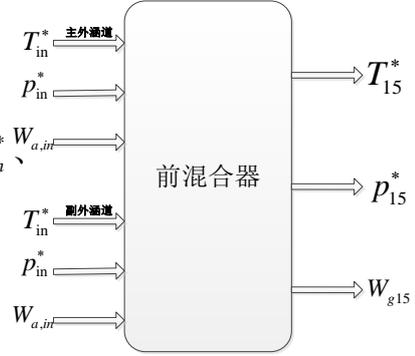


图 11 前混合器模型示意图

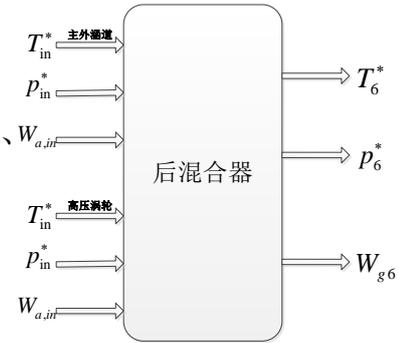


图 12 后混合器模型示意图

流量 W_{6out} :

$$\begin{cases} P_{6out}^* = P_{6in}^* \cdot \sigma_6 \\ T_{6out}^* = T_{6in}^* \\ W_{g6out} = W_{g6in} \end{cases}$$

12, 尾喷管

已知参数: 尾喷管进口总温 T_{in}^* 、总压 p_{in}^* 、

流量 W_g , 大气环境压力 p_0 。

出口参数计算:

出口总压 $p_9 = p_0$; 出口总温 $T_9 = T_7^* \tau(\lambda_9)$;

出口流量 $W_{g9} = k_m \frac{p_9}{\sqrt{T_9^*}} A_9 q(\lambda_9)$ 。

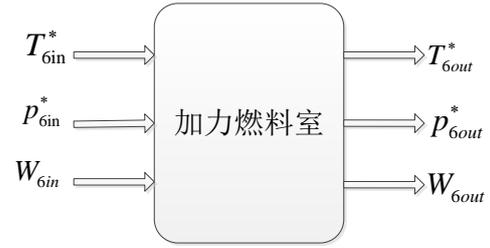


图 13 加力燃烧室模型示意图

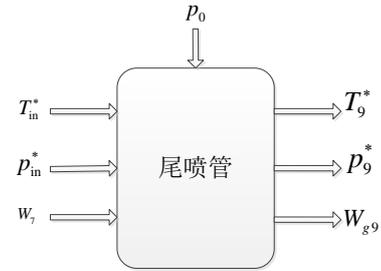


图 14 尾喷管模型示意图

5.2.2 基于 N-R 算法的变循环发动机非线性数学模型

牛顿-拉弗森算法 (Newton-Raphson, N-R 算法) 是一种传统解决非线性方程组的算法, 广泛用于航空发动机非线性数学模型的求解, 这在许多文献中都有涉及, 在此就不赘述。

但本题中需求解的是一组隐式非线性方程组, 为发动机全流程计算, 无法对各变量求偏导, 故需作出改进。

N-R 算法在本题中需求解 $E = (e_1, e_2, \dots, e_7)$ 七个残量组成的非线性方程组。

这时的非线性方程组可以写成: $E_i = (V_1, V_2, \dots, V_7)$, 令 $E_i = (V_1, V_2, \dots, V_7)$ 的假

设初始值: $V^{(0)} = (V_1^{(0)}, V_2^{(0)}, \dots, V_7^{(0)})$, 迭代到第 K 步时:

$$V^{(K)} = (V_1^{(K)}, V_2^{(K)}, \dots, V_7^{(K)})。$$

则非线性方程组在 $V^{(K)}$ 附近的偏微分方程组为:

$$dE_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial E_i}{\partial V_j} dV_j, \quad (j=1, 2, \dots, 7) \quad \text{式 (23)}$$

用差商代替微商, 则上式变为:

$$\Delta E_i = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta E_i}{\Delta V_j} \Delta V_j \quad \text{式 (24)}$$

上式还可改为:

$$\Delta V = M^{-1} \Delta E \quad \text{式 (25)}$$

式中： M 为 n 阶系数矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{\Delta E_i}{\Delta V_j} \end{pmatrix}_{n \times n}$ ； ΔV 为解向量； ΔE 为列向量。由

上式得到 ΔV 后，那么 $K+1$ 次逼近的变量值为：

$$V_j^{(k+1)} = V_j^{(k)} + \Delta V_j \quad \text{式 (26)}$$

如此反复迭代，不断修正独立变量的试给值，直至各平衡方程的误差满足设定的精度要求，就得到了共同工作方程的数值解，即获得了发动机的共同工作点^[4]。

对于发动机全流程计算中单个的非线性方程的求解，主要应用了牛顿下山法。牛顿下山法为 N-R 算法的一个改进。其基本思想如下：在一定的条件下，求解非线性方程 $f(x)=0$ 可以等价地看成求函数 $|f(x)|=0$ 的最小点。若把函数 $|f(x)|$ 的图像想象为许多山峰的话，求极小点就相当于找到山谷谷底。N-R 算法如果不收敛，通常是在两面（或更多）山坡之间跳跃，每次都跳过谷底。从函数的角度来讲，这个现象出现是因为每次修正迭代点时，修正的幅度太大了。

N-R 算法的迭代公式为

$$x_{k+1}(\lambda) = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{式 (27)}$$

其中，

$$\lambda = \max \left\{ 2^{-t} : |f(x_{k+1}(2^{-t}))| < |f(x_k)|, t = 0, 1, 2, \dots \right\} \quad \text{式 (28)}$$

即 N-R 算法对应的参数恒为 1，而 N-R 算法的参数 λ 是每一步变化的， λ 取满足函数值下降条件 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$ 的 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ 中最大的那个值。基于以上思想列出 N-R 算法解决变循环发动机非线性数学模型的算法步骤：

STEP1: 给定初始向量 $X^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0, x_7^0)^T$ ，残差 ERR^* ，精度 k ， $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ；

STEP2: 若 $|F(x_i^k)| \leq ERR^*$ ，近似解为 X^k ，停止迭代；

STEP3: 令 $d_i^k = -\frac{f(x_i^k)}{f'(x_i^k)}$ ， $\lambda = 1$ ；

STEP4: 若 $|F(x_i^k + \lambda d_i^k)| < |F(x_i^k)|$ ：

则 $x_i^{k+1} = x_i^k + \lambda d_i^k$ ，转 (5)；否则， $\lambda = \frac{1}{2} \lambda$ ，重复 STEP4；

STEP5: $k = k + 1$ ，转 (2)。

在整个发动机全流程计算中对于非线性方程的求解,都为牛顿下山法求解,效果很好。

5.2.3 基于 GA 算法的变循环发动机非线性数学模型

GA 算法是一种基于自然群体遗传演化机制的搜索寻优算法,它是美国学者 Holland 于 1975 年首先提出来的。算法摒弃了传统优化方法的搜索方式,模拟自然界生物进化过程,采用人工进化的方式对目标空间进行随机化搜索。它将所研究问题的可能解看作是群体的一个个体(类似于生物的染色体),每一个个体,通过编码形成符号串形式,与问题的一个可能解对应,个体组合为群体,模拟达尔文的遗传选择和优胜劣汰的生物进化过程,反复对群体进行基于遗传学的操作(选择,交叉和变异),并依据个体的适应度对每个个体进行优劣评价,“适者生存,不适者淘汰”,使进化不断得到更优的群体。遗传算法对求解问题本身一无所知,所需要的仅是对算法产生的每个个体进行评价,通过作用于个体上的基因,寻找更好的个体来求解问题。合理地设计算子,能使所要优化的问题从初始解开始,以并行搜索方式,一步步逼近,最终获得问题的全局最优解。

遗传算法包括以下几大部步骤:编码、种群设定、适应度函数计算、遗传操作。由于遗传算法的鲁棒性,对编码要求不太严格。种群设定紧接编码,以初始化的种群为起点进行一代代计算的,种群规模影响着计算量的大小。适应度函数是性能目标函数变换而来的,直接影响到收敛速度及能否找到最优的个体。遗传操作包涵三个基本的算子:选择、交叉和变异。其作用就是对种群的个体按适应度值大小进行一定的操作,从而实现自然界中一样的优胜劣汰的进化过程。使用遗传算法时需要针对解决的寻优问题对参数进行设定,这些参数包括变量大小、种群规模,交叉概率,变异概率、最大遗传代数等。

种群规模表示种群中不同个体数目,即变量在给定范围内的可分成的数量,取值相对较小时,会降低种群的多样性,即变量的值相对较少。种群规模影响遗传算法的运算速度,及成熟进度;取值较大会增加计算量。科学研究中一般使用的范围为 20~100。交叉操作是遗传算法中产生新个体的主要方法,所以交叉概率一般应取较大值。取值过大,会破坏群体中的优良模式,对进化算法产生不利影响;取值过小又会影响到产生新个体的速度,不利于算法快速收敛。一般使用的取值范围为 0.4~0.99。变异概率的作用是产生新的个体,新个体的产生能够抑制种群的早熟。变异概率取值大时,容易产生新的个体,这样有可能遗失满足适应度的个体;变异概率取值小时,起不到抑制种群的早熟作用,且不易产生新的个体。一般工程中变异概率取值范围为 0.0001~0.01。

以下详细阐述用遗传算法求解变循环发动机平衡方程的技术流程。

(1) 权重系数 $\lambda_1 \sim \lambda_7$ 的确定

根据题意,式(13)中 7 个平衡方程均为归一化的形式, $err(i)$, ($i=0,1,\dots,7$)

在目标函数式(21)中所占比重一致,因此 $\lambda_1 \sim \lambda_7$ 取相同值。为了克服计算机有限字长效应对遗传算法适应度计算与选择过程的影响,选取 $\lambda_1 \sim \lambda_7$ 为 10^5 。

(2) 独立变量选取与编码位数确定

对于变循环发动机，在双涵道模式下，发动机数学模型包含高压转速（高压压气机、CDFS、高压涡轮物理转速） n_H ，风扇压比函数值 Z_{CL} ，CDFS 压比函数值 Z_{CDFS} ，高压压气机压比函数值 Z_{CH} ，主燃烧室出口温度 T_4^* ，高压涡轮压比函数值 Z_{TH} ，低压涡轮压比函数值 Z_{TL} 等七个独立变量。

遗传算法中，变量的范围虽然不能改变算法的收敛性，但会影响算法的计算效率。相同的编码长度，变量范围越小，个体的分辨率越高，相应地计算精度也越高；若计算精度保持不变，则变量范围越小，个体编码长度相应地减少，算法的计算效率将会提高，因此总是希望变量的变化范围越小越好。另外为了保证平衡方程的解满足一定的精度要求独立变量的分辨率就不能太低，然而一味地追求高的分辨率，又会降低整个模型的计算效率。经过多次调试与仿真计算，上述变量的编码长度按下表选取

表 1 GA 算法各变量的编码长度

变量名称	n_H	Z_{TH}	Z_{CDFS}	Z_{CH}	T_4^*	Z_{TH}	Z_{TL}
编码长度	14	14	14	14	12	14	14

(3) 适应度函数设计

适应度函数是遗传算法选择操作的依据。适应度函数反映了方程组解的质量，适应度函数值越大，个体对应的近似解越接近方程组的真实解。采用遗传算法求解式 (21) 中 X （方程组的解）时，随着进化代数增加，各个体对应的误差函数 $ERR(X)$ 趋向于 0。当适应度函数设计不合理时，可能使个体的适应度函数趋于一致，各个体将会以相近的概率遗传到下一代，从而最优个体不能迅速逼近方程组的真实解，影响算法的运行效率。根据遗传算法适应度函数单值、非负、连续的要求，以及发动机平衡方程求解的具体情况，本文设计适应度函数如下：

$$U(X) = ERR_{\max} - ERR(X) + k(ERR_{\max} - ERR_{\min}) \quad \text{式 (29)}$$

其中 ERR_{\max} ， ERR_{\min} 分别为当前群体中误差函数 $ERR(X)$ 的最大值和最小值； $k(k \geq 0)$ 为待定系数。参数 k 的取值分析：

由式 (29)，群体中各个体对应的误差函数值确定后，个体的适应度取决于系数 k 。当个体的误差函数 $ERR(X) = ERR_{\min}$ 时，

$$U_{\max} = (1+k)(ERR_{\max} - ERR_{\min}) \quad \text{式 (30)}$$

$ERR(X)$ 为最大, 即 $ERR(X) = ERR_{\max}$ 时,

$$U_{\min} = k(ERR_{\max} - ERR_{\min}) \quad \text{式 (31)}$$

$$\text{因此有 } p(k) = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{k+1}{k}$$

由上式可知, k 为当前代群体中最大与最小适应度之比 $p(k)$ 的控制系数。

上式中, 若 k 取值过大, $p(k)$ 趋近于 1, 即群体中 $ERR(X)$ 最大值和最小值对应个体有较接近的适应度和选择概率, 整个计算过程退化至接近于随机搜索; 若 k 取值过小, $p(k)$ 趋向 1, 致使群体中误差函数值较小个体的适应度和选择概率过小, 失去复制到下一代的机会, 从而选择操纵快速向某个或某几个个体集中, 使获得解的计算效率下降。

对于 k 的取值, 参考相应的文献资料, 一般情况下, 保持群体中最佳与最差个体的适应度之比与群体规模数 N 一致时, 计算效果最好, 即:

$$\begin{aligned} p(k) &= (1+k)/k = N \\ k &= 1/(N-1) \end{aligned} \quad \text{式 (32)}$$

虽然 ERR_{\max} , ERR_{\min} 随每一代群体不同而变化, 但按式 (32) 确定的适应度函数能使算法在确定适应度和个体选择力度上具有一定的适应性。

(4) 进化策略及其参数

遗传算法计算时采用轮盘选择、简单交叉、均匀变异进化策略。群体规模、交叉概率、变异概率等参数的选择, 将影响计算效率, 不合适的参数设置有可能得不到方程的真解。关于上述参数, 目前在遗传算法研究中还没有确定的理论设计方法。本文在解发动机模型平衡方程时, 参考有关资料, 经多次优化, 最终取群体规模 180, 交叉概率 0.88, 变异概率 0.01。

程序实现如下:

```
nvars = 7;           % 个体的变量数目
A=[]; b=[];
Aeq=[]; beq=[];
VLB=[0.87;1000;0.2;0.6;0.2;0.2;0.01]; VUB=[0.88;2000;0.8;0.8;0.8;0.8;0.1];
%*****参数设置*****
options=gaoptimset('CrossoverFcn',@crossoverscattered,'MutationFcn',@mutationuniform,'Display','iter','PlotFcns',{@gaplotbestf,@gaplotstopping},'Generations',180,'StallGenLimit',180,'TolFun',1e-6,'TolCon',1e-6);
%***** 调用 ga 函数 *****
[x,fval,exitflag,Output,population,scores]=ga(@f_newton,nvars,A,b,Aeq,beq,VLB,VUB,@yuesu_ga,options);
```

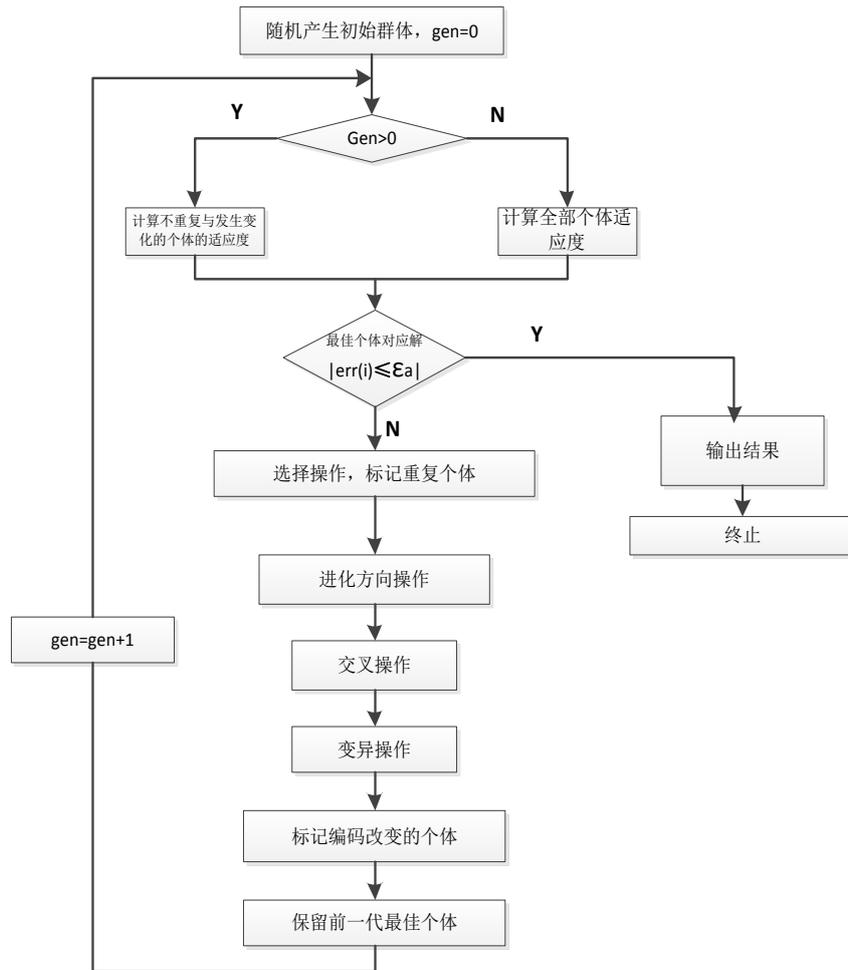


图 15 基于 GA 算法的程序流程图

5.2.3 基于 N-R 算法和 GA 算法的变循环发动机非线性数学模型及其评价

基于上述思想，为保证模型的计算效率，设计 GA 算法与 NR 算法交替计算的混合算法。其中 N-R 算法仍然是平衡方程求解方法的主体，数值仿真时，对在设定的迭代次数内不收敛工作点(可以看作现有模型不收敛点)，则调用遗传算法重新确定一点，作为 N-R 算法求解新的迭代初值，如果新一轮计算仍不收敛，再次调用遗传算法确定新的初值，如此反复。此处核心程序如下：

```

if it>maxit
    gaflag=0;
    while ~gaflag
        [x,fval]=ga_function(); %调用遗传算法计算
        if abs(fval)<=tolf
            it=0;
            break;
        end
    end
end
end
end

```

算法流程图如下图所示：

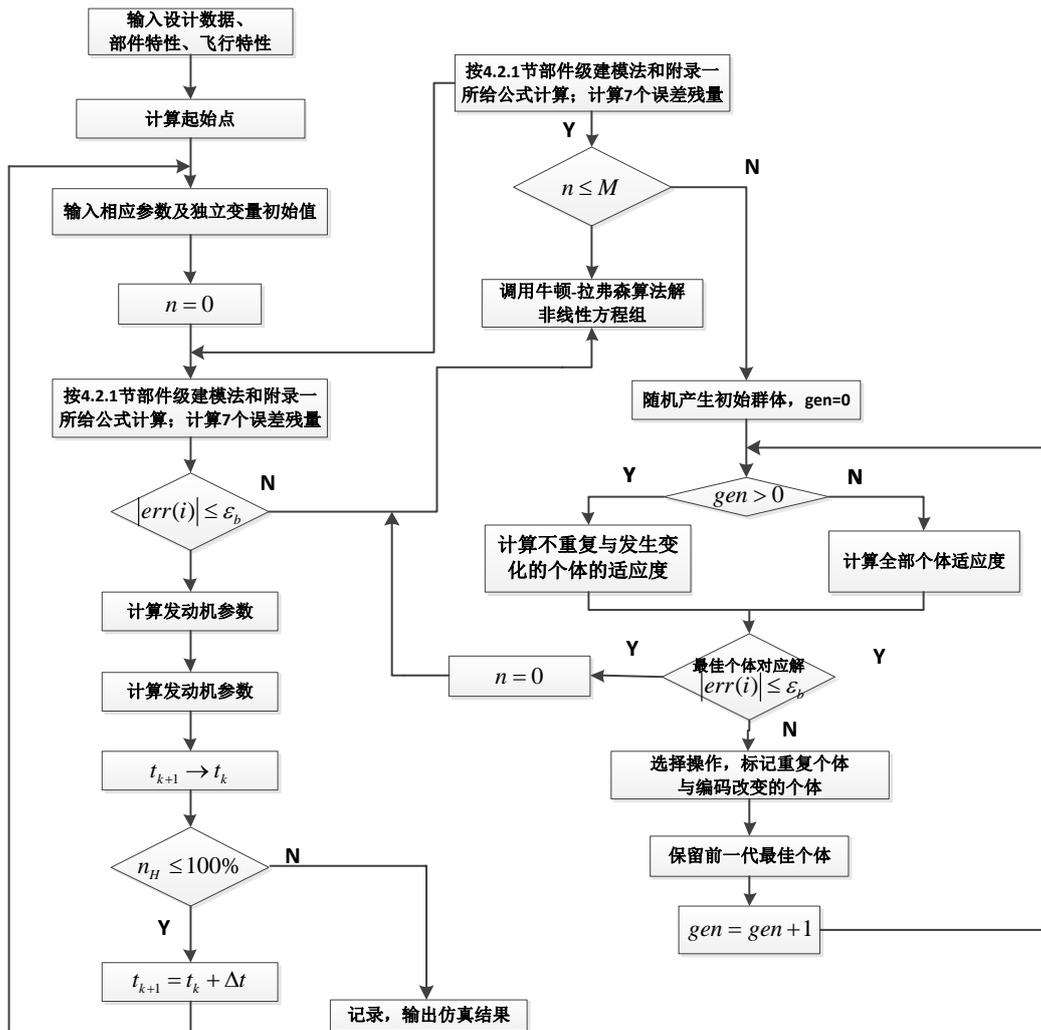


图 16 基于 N-R 算法和 GA 算法的混合算法程序流程图
本文在 Matlab 中编程实现^[7]，解得结果如下

表 2 基于 N-R 算法和 GA 算法的混合算法求解结果

求解参数	结果值
高压压气机导叶角 n_H	0.879
主燃烧室出口温度 T_4^*	1520
风扇压比函数值 Z_{CL}	0.554
CDFS 压比函数值 Z_{CDFS}	0.634
高压压气机压比函数值 Z_{CH}	0.793
高压涡轮压比函数值 Z_{TH}	0.213
低压涡轮压比函数值 Z_{TL}	0.0254

就当前广泛应用的发动机非线性数学模型而言，仿真计算表明，单纯采用 N-R 算法不仅具有较高的计算效率，而且模型在包线范围的绝大部分是收敛的，不收敛的范围只是有限的工作段或部分工作点。发动机性能数值仿真时，正是因为存在有限的不收敛范围(或工作点)，影响了模型的整体收敛性。本文研究的目的在于寻求一种通用算法，使发动机模型在不太降低计算效率的情况下，扩大收敛范围。如果我们能将目前模型中不收敛的工作点，采取一定的解法使之收敛的话，即可实现模型大范围收敛的目标。

5.3 基于 GA 算法的变循环发动机性能寻优

根据题给条件，此时变循环发动机有三个可调变量：CDFS 导叶角度 α_{cdf} 、低压涡轮导叶角度 α_{low} 和喷管喉道面积 A_8 。在变循环发动机模型中，这些可调变量在各自的可调范围内可调，为了能充分发挥出变循环发动机的性能，需要使用遗传算法进行性能寻优。寻优目标分两种：最大推力模式和最小耗油率模式，对于最小耗油率模式寻优时，需要保持发动机推力为恒定值，因此最小耗油率模式需要对主燃油量 W_f 可调。最大推力模式需要将尾喷管面积考虑到一起调节。

变循环发动机数学模型是非线性、时变的复杂系统，可以表示为以下关系：

$$X = G(u) \quad \text{式 (33)}$$

其中， $X = \{F, sfc, n_H, n_L, \dots\}$ 为发动机的状态参数， $u = \{A_8, \alpha_{cdf}, \alpha_{low}, W_f, \dots\}$ 为发动机的控制参数。由于变循环发动机控制变量比较多，而且这些变量中无论哪一个对发动机性能参数都有影响。模型中设定的两种循环模式下的变量值对不同的飞行条件下性能不一定最优，需要对可调变量进行性能寻优，找到最合适的值。变循环发动机性能寻优控制就是在特定的工作状态，通过在有限范围内优化这一组控制变量，使得设定的性能目标达到最优。可以描述为以下非线性规划表达形式：

$$\text{性能目标: } \max(\min)G(u) \quad \text{式 (34)}$$

$$\text{约束条件: } q_{i \min} \leq Q(u) \leq q_{i \max}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad \text{式 (35)}$$

从材料寿命来讲，发动机均存在着工作极限，比如：从材料的强度来讲，发动机转子存在着转速限制，速度过高轮盘就破裂了；从材料的耐高温和散热性能出发，高压涡轮承受的最高温度不能高于一定值，而且没有高温传感器能承受得了燃烧室出口温度；然而增加转子部件存在着喘振边界，一旦喘振，效率明显下降，在执行任务时，很有可能造成危险及威胁生命安全。基于发动机部件的工作极限和发动机非设计性能的要求，参考相应文献资料，变循环发动机进行性能寻优控制时应遵循以下原则：

- 1) 增加转子部件的换算转速不超出给定的最大值，这是稳定工作余度的限制；
- 2) 转子部件物理转速不超出最大值，这是发动机振动强度、材料的限制；
- 3) 涡轮前温度不超限，这是发动机主燃烧室、涡轮材料热负荷的限制；
- 4) 在满足上述部件工况限制的条件下发动机推力最大，这是发动机最大状态性能的要求。

遗传代数没有合适的取值范围，在实际研究中以能够得到收敛的稳定优化数据为准。在问题三中，遗传算法可调变量个数为 3，选定的种群规模为 80，交叉概率为 0.8，变异概率为 0.001，最大遗传代数为 200。遗传算法适应度函数是解决寻优问题的关键，一般用来解决最大值问题。对于变循环发动机分两种不同的寻优目标进行性能寻优，可以在适应度函数中将最小值问题转化为最大值问题。通过在遗传算法适应度函数中设置惩罚函数，将有约束条件的转化为无约束条件的优化问题，对不满足约束条件的个体予以惩罚，使其在“择优”环节被淘汰^[6]。

在遗传算法中设置寻优的变量为三个，模型中对变循环发动机性能寻优分为两种模式：最大推力和最小耗油率。最小耗油率寻优时，模型中给出一个恒定的推力值。适应度部分通过调用发动机模型中的参数计算得到，每代都保存仿真的适应度值及变循环发动机的性能参数，最终输出变循环发动机可调变量的最优值。算法流程图如下所示

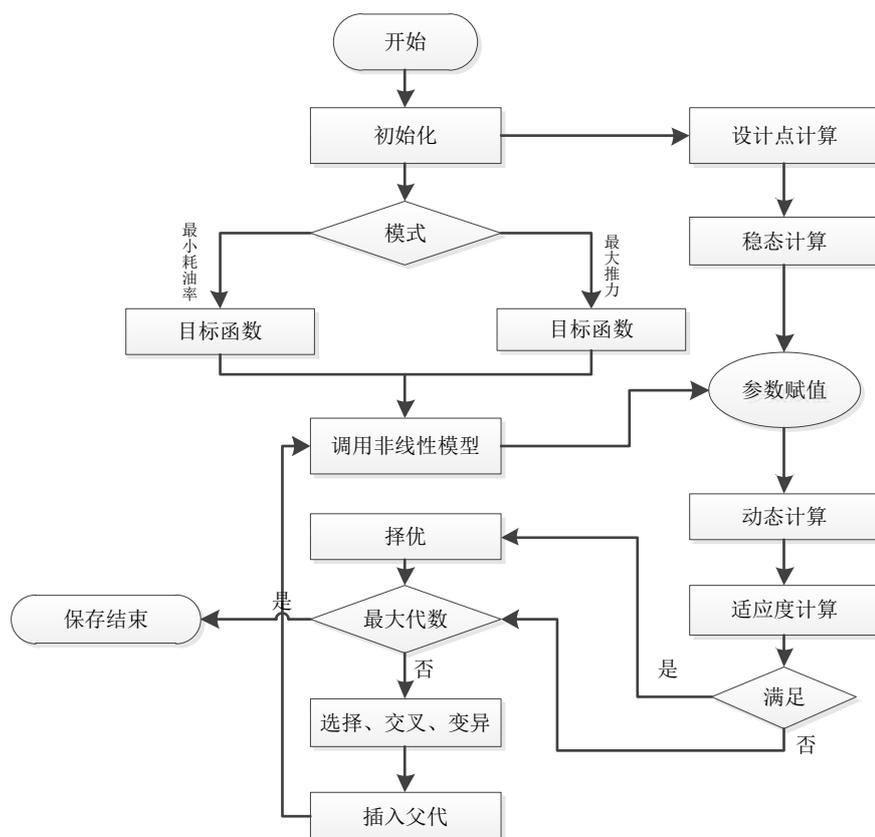


图 17 基于 GA 算法的发动机性能寻优程序流程图

(1) 最大推力寻优

在执行飞行任务时，起飞、爬升、追击、逃离等情况需要发动机提供更大

的推力，除了增加加力燃烧室的燃油量提供动力外，还可以通过最大推力性能寻优，合理协调发动机各可调变量，使发动机性能参数达到最优，实现推力最大化。这种方法，不增加发动机重量，而且比改善发动机结构、部件尺寸和位置等措施带来更高的性能效益。对于变循环发动机而言，可调变量之间协调是比较复杂的问题，可以通过遗传算法进行寻优控制。变循环发动机最大净推力寻优可以用数学式表示为：

$$\text{推力: } F = W_g c_9 - W_a V + (p_9 - p_0) A_9$$

$$\text{目标函数: } \max F$$

$$\text{约束条件: } st \begin{cases} 0 < n_H \leq n_{H,\max} \\ 0 < n_L \leq n_{L,\max} \\ u \in B\{u | a \leq u \leq b\} \end{cases} \quad \text{其中, } u = \begin{bmatrix} A_8 \\ \alpha_{cdfs} \\ \alpha_{low} \end{bmatrix} \quad \text{式 (36)}$$

遗传算法中用来进行性能判断的适应度函数可以将有约束问题转化成无约束问题，通过采用惩罚函数，一旦性能参数超过约束条件边界，则适应度函数值变小。最大推力控制模式的目标函数可表示为：

$$Fit(u) = G(u) - y(x) \quad \text{式 (37)}$$

$$y(x) = \lambda_1 \left(\max \left\{ 0, \frac{n_H - n_{H,\max}}{n_{H,\max}} \right\} \right)^2 + \lambda_2 \left(\max \left\{ 0, \frac{n_L - n_{L,\max}}{n_{L,\max}} \right\} \right)^2 \quad \text{式 (38)}$$

对遗传算法编制的程序（附在附件中）运行三次算出的结果进行整理，得到三组最优解。如下表所示（飞行马赫数 $Ma = 1.5$ ）：

表 3 最大推力寻优下的三个可调变量的值及最大推力

CDFS 导叶角度	低压涡轮导叶角度	喷管喉道面积	最大推力
2.563	-9.214	0.794e+004	25473.64
1.98	-8.5	0.838e+004	24986.33
1.66	-8.9	0.854e+004	25523.42

三次运算中，遗传代数在 150 代左右趋于稳定，通过三次运算，每次的结果大抵相当，可知 CDFS 导叶角度在 2° 左右、低压涡轮导叶角度在 -9° 左右，喷管喉道面积在 $0.8e+004$ 左右时，最大推力达到最优。

飞行马赫数从 $Ma = 1.1$ 变化到 $Ma = 1.6$ 情况时，由于计算机运行能力有限，无法得到有效解。

(2) 最小耗油率性能寻优

飞行半径是飞行器特别是军用机型的一个非常重要的性能指标，飞行半径大，军机执行任务所能覆盖的范围就广。而飞行半径取决于发动机的耗油率，在保持推力不变的条件下减少燃油消耗率，可以有效提高飞行器作战半径，从而提升战斗中的战斗力。变循环发动机最小耗油率寻优需要在推力恒定条件下，寻找耗油率最小的点，数学表达如下所示：

$$\text{耗油率: } sfc = \frac{3600W_f}{F}$$

目标函数: $\min sfc$

$$\text{约束条件: } st \begin{cases} F = F_{const} \\ 0 < n_H \leq n_{H,max} \\ 0 < n_L \leq n_{L,max} \\ u \in B\{u | a \leq u \leq b\} \end{cases} \quad \text{其中, } u = \begin{bmatrix} A_g \\ \alpha_{cdf_s} \\ \alpha_{low} \end{bmatrix} \quad \text{式 (39)}$$

最小耗油率寻优的惩罚函数表示为:

$$Fit(u) = G(u) - y(x) \quad \text{式 (40)}$$

$$y(x) = \lambda_1 \left(\max \left\{ 0, \frac{n_H - n_{H,max}}{n_{H,max}} \right\} \right)^2 + \lambda_2 \left(\max \left\{ 0, \frac{n_L - n_{L,max}}{n_{L,max}} \right\} \right)^2 + \lambda_3 \left(\frac{F - F_{const}}{F_{const}} \right) \quad \text{式 (41)}$$

最小耗油率寻优要保持推力值不变, 在寻优时调节燃油量, 保持推力不变, 所以最小耗油率寻优时需要控制三个变量, 其中, 通过燃油量的调节保证发动机的推力基本保持不变。其余变量分别为变循环发动机的可变几何量。分别对变循环发动机的单涵道模式进行了寻优仿真, 寻找耗油率最小时, 可调变量的最优值。

程序初始化时, 设置发动机推力保持在 25000N, 在此恒定推力的条件下, 以及最低耗油率这一目标函数的定义下, 给定 CDFS 导叶角度、低压涡轮导叶角度, 喷管喉道面积这三个变量的初值进行计算, 也进行了三次运算: 整理成表格如下 (飞行马赫数 $Ma = 1.5$):

表 4 最小耗油率性能寻优下三个可调变量的值及最小耗耗油率

CDFS 导叶角度	低压涡轮导叶角度	喷管喉道面积	最小耗油率
5.96	3.85	0.738e+004	0.065
6.12	3.78	0.750e+004	0.062
6.34	4.23	0.691e+004	0.068

得出的三组结果也是非常相近的, 从以上数据可知: CDFS 导叶角度在 6° 左右、低压涡轮导叶角度在 4° 左右, 喷管喉道面积在 $0.72e + 004$ 左右时, 最小耗油率达到最优。

飞行马赫数从 $Ma = 1.1$ 变化到 $Ma = 1.6$ 情况时, 由于计算机运行能力有限, 无法得到有效解。

六、模型的评价与扩展

6.1 模型的评价

6.1.1 模型的优点

问题一中, 本文首先利用附录 3 提供的压比函数值定义式计算即可得到各

换算转速、各增压比值对应的压比函数值，然后画出流量随压比函数值变化的图形。接着利用附录 1 及附录 3 的公式在 Matlab 中编程求解得到风扇和 CDFS 的出口总温、总压和流量，其中增压比和换算流量涉及到了插值计算。

针对问题二本文利用 GA 算法与 N-R 算法的优点，设计了 GA 算法与 N-R 算法相结合的混合算法，用于求解变循环发动机模型的平衡方程。在发动机所有工作点仿真时，首先由 N-R 算法求解，对于 N-R 算法求解不收敛的工作点，则调用 GA 算法重新确定一点，作为 N-R 算法新的迭代初值，如此反复。既保持了 N-R 算法的高计算效率，又吸收了遗传算法全局收敛的优点。

问题三本文采用遗传算法对变循环发动机的变几何量进行编码，执行遗传操作对某一性能目标进行寻优，单涵道模式下，对变循环发动机的在固定和变化马赫数下进行最大推力、最小耗油率性能寻优控制。模型可靠，扩展性强。

本文充分运用 Matlab、EXCEL 等软件的强大科学计算能力，优化了计算程序，缩减了工作量，得出了置信程度较高的模型求解结果。

6.1.2 模型的不足

本文在变循环发动机部件级建模、非线性数学模型及性能寻优方面做了一定的工作，但还有很多工作有待完善。本文所研究的内容是变循环发动机控制研究的开始，由于变循环发动机部件级数学模型缺少相关部件的特性数据，模型本身存在不完善部分，仿真的结果与实际情形存在差距。

在对变几何可调变量的实时性能寻优过程中，模型在每次寻优的结果赋值后还没有稳定就进行下一次的性能寻优，这样寻优的结果相对而言存在一定的误差，这也是变量的范围比较大时，系统一直不稳定的原因，今后在进行实时性能寻优时，可以在程序中采用延时的办法，让性能寻优程序在输出一组最优结果后暂时不工作，等待一段时间之后，再进行性能寻优。另外对于真实的发动机而言，性能寻优的约束条件往往很多，还需要根据飞机的实时需求，来要求发动机的性能。变循环发动机的性能寻优目标尽可能的进行补充，对数学模型的实时仿真也需要考虑很多其他因素，要实行完美的多变量控制及性能寻优，需要从飞推综合控制方面研究^[8]。

6.2 模型的扩展

本文利用 N-R 算法和 GA 算法的混合算法进行求解，扩大了模型的收敛范围。然而，GA 算法运算量过大，复杂的编码技术不易掌握，限制了其实际应用。因此，寻找一种方法简单、易于掌握以及收敛性好的算法便具有较高的理论和工程意义^[9]。

神经网络 BP (Back Propagation) 是一种单向传播的多层前向网络，可以逼近任意的非线性映射关系。可以尝试将其与 N-R 算法相结合，提出一种新的基于 N-R 算法和 BP 算法的混合智能方法。

6.2.1 航空发动机的平衡方程

参见前一节中列出的七个平衡方程：

$$\begin{cases} err_1 = N_{CL} - N_{TL}\eta_{mL} \\ err_2 = N_{CH} + N_{CDFS} - N_{TH}\eta_{mH} \\ err_3 = W_{g41} - W'_{g41} \\ err_4 = W_{g45} - W'_{g45} \\ err_5 = p_{61} - p_{62} \\ err_6 = A_8 - A'_8 \\ err_7 = W_{a2} - W_{a21} - W_{a13} \end{cases} \quad \text{式 (42)}$$

需要给出 6 个预猜值: $n_H, Z_{CL}, Z_{CH}, T_4^*, W_{g41}, W_{g45}, W_{a2}$

令

$$x = [n_H, Z_{CL}, Z_{CH}, T_4^*, W_{g41}, W_{g45}, W_{a2}]^T \quad \text{式 (43)}$$

$$y = [err_1, err_2, err_3, err_4, err_5, err_6, err_7]^T \quad \text{式 (44)}$$

平衡方程求解问题即为求解如下的非线性方程组:

$$y = f(x) = 0 \quad \text{式 (45)}$$

假设 x_0 为上面方程组的解, $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 存在, 则有

$$f(x_0) = 0, x_0 = f^{-1}(y) \quad \text{式 (46)}$$

如果能求得 $x = f^{-1}(y)$, 则可由式 (46) 方便的得到式 (45) 的解 x_0 。尽

管 $x = f^{-1}(y)$ 的显示表达式不易求得, 但如果能够得到其映射数据 (x, y) , 则可以利用各种拟合方法逼近 $x = f^{-1}(y)$, 从而得到 x_0 。这边的拟合方法我们采用了 BP 神经网络加以实现。

6.2.2 BP 神经网络的原理

BP 神经网络由输入层、隐层和输出层组成。输入层神经元的输出等于输入, 而隐层和输出层第 j 个神经元的输出为

$$O_j = f\left(\sum_{i=1}^m w_{ji} O_i'\right) \quad \text{式 (47)}$$

式中 $f(\bullet)$ 为神经元的作用函数; w_{ji} 为上一层第 i 个神经元与本层第 j 个神经元的连续权值; O_i' 为上一层第 i 个神经元的输出; m 为上一层神经元的个数。隐层的作用函数一般为非线性的 Sigmoid 型函数, 输出层的作用函数则一般选

线性函数。

对已给定的 N 个样本 (x_p, y_p) ($p=1, 2, \dots, N$)，输入信号 x_p 依次经过各层神经元处理后，由输出层输出结果 d_p ，则有总体误差

$$E = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^n (y_{pq} - d_{pq})^2 \quad \text{式 (48)}$$

式中 n 为输出维数。BP 算法利用梯度下降法调整网络权值，使误差 E 达到最小。

6.2.3 结合 N-R 算法的 BP 神经网络算法

BP 算法收敛较快，但精度偏低，N-R 算法虽然对初值要求较高，但是精度和效率都比较高，综合二者的算法思想，提出以下的具体步骤：

STEP1：对于平衡方程中的预猜值，给定多组值 x_i ($i=1, 2, \dots, N$)，利用发动机非线性仿真程序得到误差向量 y_i ；

STEP2：以 y_i 和 x_i 作为 BP 网络的输入输出样本，对网络进行学习，获取网络参数；

STEP3：以 $y_0 = [0, 0, \dots, 0]^T$ 作为输入仿真 (2) 中训练好的 BP 网络，得到的输出近视为方程组 (1) 的解 x_0' ；

STEP4：以 x_0' 作为初始值，利用 N-R 算法求解方程组 (1)，得到模型的解 x_0 。

由于时间有限，本文没有具体编程实现上述的基于 N-R 算法和 BP 算法的混合模型，但可以作为对正文基于 N-R 算法和 GA 算法的混合模型的一种改进和扩展，也为未来工作的展开以及后续研究者都提供了一个新的思路。

七、参考文献

- [1] 苟学中，变循环发动机建模及控制规律研究[D]，南京航空航天大学，2012
- [2] 苟学中，周文祥，黄金泉，变循环发动机部件级建模技术，航空动力学报，28 (1): 104-111, 2013
- [3] 姜启源，数学模型，北京：高等教育出版社，2005
- [4] 徐鲁兵，面向对象的航空发动机性能仿真系统设计与实现，西北工业大学，2007

-
- [5]苏三买, 廉小纯, 遗传算法在航空发动机非线性数学模型中的应用, 推进技术, 25 (3): 237-240, 2004
- [6]王安麟, 姜涛, 刘广军, 智能设计, 高等教育出版社: 2008
- [7]王建卫, MATLAB7.X 程序设计, 北京: 中国水利水电出版社, 2007
- [8]王云, 航空发动机原理, 北京: 北京航空航天大学出版社, 2009
- [9]苏三买, 遗传算法及其在航空发动机非线性数学模型中的应用研究[D], 西北工业大学, 2002

八、附件

附件清单:

主文件名:

main_question1.m main_newton.m main_newtonga.m main_ga.m

原始数据文件名:

original_data.m

各部件计算文件名:

进气道 jinqidao.m 风扇 fengshan.m CDFS CDFS.m
高压压气机 yaqiji.m 主燃烧室 zhuransaoshi.m 高压涡轮 gaoyawolun.m
低压涡轮 diyawolun.m 涵道 handao.m 前混合器 qianhunheqi.m
后混合气 houhunheqi.m 加力燃烧室 jialiranshaoshi.m
尾喷管 weipenguan.m

发动机性能参数文件名:

推力 tuili.m 单位推力 danweituli.m 耗油率 haoyoulv.m

工质物理性质参数文件名:

空气的焓 Hair.m 纯燃气的焓 Hst.m 燃气的焓 Hgas.m
空气的熵 Sair.m 纯燃气的熵 Sst.m 燃气的熵 Sgas.m

气动函数文件名:

tau_lambda.m pi_lambda.m q_lambda.m f_lambda.m z_lambda.m

数学算法文件名:

拉格朗日 lagrange.m 牛顿下山 newtondownhill.m 牛顿 newton.m
遗传 ga_function.m 差商 chashang

牛顿下山法解方程中用到的中间函数文件名:

eqchukouzongwen_fs.m eqchukouzongwen_cdfs.m

eqchukouzongwen_yqj.m eqfb_zrss.m eqlambda6_hhhq.m
eqlambda9_wpg.m eqlambda15_qhhq.m eqlambda61_hhhq.m
eqlambda125_qhhq.m eqouteit_cdfs.m
eqouteit_fs.m eqouteit_yqj.m eqt6_hhhq.m eqt15_qhhq.m
eeqchukouzongwen_fs.m eeqchukouzongwen_cdfs.m
eeqchukouzongwen_yqj.m eeqfb_zrss.m
eeqlambda6_hhhq.m eeqlambda9_wpg.m eeqlambda15_qhhq.m
eeqlambda61_hhhq.m eeqlambda125_qhhq.m eeqouteit_cdfs.m
eeqouteit_fs.m eeqouteit_yqj.m eeqt6_hhhq.m eeqt15_qhhq.m